

Legyen $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} = d$. Mivel $d > 0$, ezért $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Mivel minden pozitív egész n -re $(n-1, n) = 1$, ezért $a_k = n-1$, továbbá nyilván $a_1 = 1$.

I. Legyen először n páratlan. Ekkor $(n-2, n) = 1$. (Ugyanis $x|n$ és $x|n-2$ esetén $x|2$, de n páratlan, így $x = 1$, ezért $a_{k-1} = n-2$. Így viszont $d = 1$ és ekkor minden n -nél kisebb pozitív egész relatív prím n -hez, azaz n -nek nincs nála kisebb valódi osztója; így n prím, ahogy a feladat állítja.

II. Legyen most n páros, és írjuk fel $n = 2^\alpha \cdot n_1$ alakban, ahol $\alpha \geq 1$ és n_1 páratlan.

a) Ha $n_1 = 1$, akkor n 2-hatvány, ahogy állítottuk; ekkor a feltétel nyilván teljesül, hiszen az a_i -k éppen az n -nél kisebb páratlan számok és $d = 2$.

b) Ha $n_1 = 3$ volna, akkor $n > 6$ miatt $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 7$ és $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, ez pedig lehetetlen.

c) Legyen végül $n_1 \geq 5$. Megmutatjuk, hogy ekkor $n_1 - 2$ és $n_1 - 4$ szerepel az a_i -k között. Tegyük fel ugyanis, hogy $x|2^\alpha n_1$ és $x|n_1 - 2$. Ekkor $x|2^\alpha n_1 = 2^\alpha(n_1 - 2) + 2^{\alpha+1}$ miatt $x|2^{\alpha+1}$. De x páratlan, így $x = 1$, azaz $(n_1 - 2, 2^\alpha n_1) = 1$. Hasonlóan $(n_1 - 4, 2^\alpha n_1) = 1$. Nyilván $n_1 - 3$ nem szerepel az a_i -k között, hiszen páros; így $d = 2$. De ekkor n_1 is szerepel az a_i -k között (az a_i -k rendre $1, 3, 5, \dots, n_1 - 2, n_1, \dots$). Ez viszont ellentmondás, mert $(n_1, n) = n_1 > 1$.

Beláttuk tehát, hogy n prím vagy 2-hatvány, a bizonyítást befejeztük.