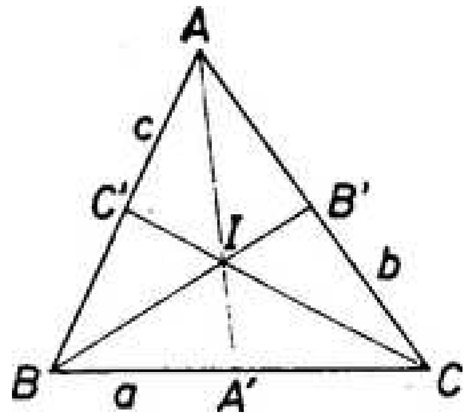
Legyenek az ABC háromszög oldalai a szokásos jelöléssel a, b, és c.



Segédtétel: Ismert, hogy

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{b+c}{a+b+c},$$
$$\frac{BI}{BB'} = \frac{a+c}{a+b+c} \quad \text{és}$$
$$\frac{CI}{CC'} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

(Ennek bizonyítása két szögfelező tétel segítségével: $BA' = \dfrac{ac}{b+c}$, így

$$\frac{AI}{IA'} = \frac{AB}{BA'} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a},$$

ahonnan valóban

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{b+c}{a+b+c}).$$

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget használva, és az $\dfrac{AI}{AA'} + \dfrac{BI}{BB'} + \dfrac{CI}{CC'} = 2$ összefüggést felismerve kapjuk, hogy

$$\frac{AI}{AA'} \cdot \frac{BI}{BB'} \cdot \frac{CI}{CC'} \leq \left(\frac{\frac{AI}{AA'} + \frac{BI}{BB'} + \frac{CI}{CC'}}{3} \right)^3 = \frac{8}{27},$$

és egyenlőség csak szabályos háromszögnél áll fenn. Másfelől az a, b és c számokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, így $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) + 4abc > 0$. Ezt beszorozva és rendezve:

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$-t, majd szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$4(a+b)(b+c)(a+c) > (a+b+c)^3,$$

azaz

$$\frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a+b+c)^3} > \frac{1}{4}.$$

Ezzel a bizonyítandó két egyenlőtlenséget beláttuk.