

Definiáljuk az  $f$  függvényt a következőképpen: Vegyük tetszőleges  $x \in \mathbb{Q}^+$  számnak a prímfelbontását, ahol a prímeket a szokásosan értelmezzük, de nem csak nemnegatív, hanem egész hatványon fordulhatnak elő a prímfelbontásban. Vegyük sorra a prímeket (minden  $x$  esetében ugyanolyan sorrendben):  $p_1, p_2, p_3, \dots$ . Ekkor  $f(x)$  legyen az a szám, amelyet  $x$  prímfelbontásából kapunk úgy, hogy  $p_{2n}$  helyébe  $p_{2n-1}$ -et,  $p_{2n-1}$  helyébe  $p_{2n}^{-1}$ -et írunk. Mivel mind a prímfelbontás, mind a behelyettesítési művelet egyértelmű, ezért  $f(x)$  is. (Persze csak adott prímfelsorolás mellett) Bebizonyítjuk, hogy  $f$  teljesíti a kívánt feltételeket:

I.  $f(x) \in \mathbb{Q}^+$  nyilvánvaló.

II. Mivel  $f$  multiplikatív, és a kritérium nem érzékeny a multiplikativitásra, ezért elég  $f(f(y)) = y^{-1}$ -et igazolni, és ezt is csak prímekre. Az  $f$  definíciója szerint

$$\begin{array}{lll} y = p_{2n} & \text{esetén} & f(f(y)) = f(p_{2n-1}) = p_{2n}^{-1} = y^{-1}, \\ y = p_{2n-1} & \text{esetén} & f(f(y)) = f(p_{2n}^{-1}) = p_{2n-1} = y^{-1}. \end{array}$$

Ezzel beláttuk az  $f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y}$  kritérium teljesülését is, azaz az így kapott  $f$  függvény példa ilyen függvényre.

*Megjegyzés.* Hammel-bázissal  $R^+$ -ra is általánosítható a feladat, illetve minden ilyen  $f$  függvény jellemezhetővé válik. (A versenyen beadott,  $R^+$ -ra is általánosított megoldásom is ezzel dolgozik, míg az itt leírt megoldásom alapötletét a versenyen csak megjegyzésben közöltem.)