Azt a pontot, ahol MD másodszor metszi a kört, jelöljük X-szel. Továbbá legyen $ADC\sphericalangle = \gamma$, $CDX\sphericalangle = \alpha$, $XDB\sphericalangle = \beta$. Mivel szintén az AC ívhez tartozik, $ABC\sphericalangle = \gamma$. Az FG egyenes a DEM háromszög körülírt körének E-beli érintője, e kis körben az FEM szög az EM húrhoz tartozó érintő szárú kerületi szög, így $FEM\sphericalangle = EDM\sphericalangle = \alpha$. Ennek csúcsszögére: $GEA\sphericalangle = \alpha$. Ezentúl csak az $ABCD$ körülírt körére fogunk hivatkozni „kör” néven. E kör sugarát $\frac{1}{2}$-nek választva, és tetszőleges L_1, L_2, L_3 köri ponthármasra az általános szinusztételt felírva:

$$(*)\qquad L_1L_3 = (\sin L_1L_2L_3\sphericalangle)\cdot 2R = \sin L_1L_2L_3\sphericalangle.$$

Az AEG háromszögben a szinusztételt felírva:

$$(**)\qquad \frac{EG}{\sin GAE\sphericalangle} = \frac{AE}{\sin AGE\sphericalangle}.$$

Itt két észrevételt teszünk: mivel $GAE\sphericalangle + EAC\sphericalangle = 180^\circ$, ezért $\sin GAE\sphericalangle = \sin EAC\sphericalangle$. Másrészt CB feletti szögek kerületi szögek lévén $\alpha+\beta = CDB\sphericalangle = CAB\sphericalangle$ és $CAB\sphericalangle$ az AEG háromszög külső szöge, így $\alpha+\beta = CAB\sphericalangle = AGE\sphericalangle + AEG\sphericalangle$, tehát $AEG\sphericalangle = \alpha$ szerint $AGE\sphericalangle = \beta = XDB\sphericalangle$.

A $(*)$ és $(**)$ állításokból:

$$(1)\qquad EG/CB = AE/XB.$$

Vegyük észre, hogy az EFB háromszögben az E csúcsnál levő szög α, a B-nél levő γ, ezért az F csúcsnál levő szög $180^\circ - \alpha - \gamma$, $\sin EFB\sphericalangle = \sin(\alpha+\gamma) = AX$. Az EFB háromszögben a szinusztétellel: $\frac{EF}{\sin\gamma} = \frac{EB}{\sin(\alpha+\gamma)}$, így $(*)$ szerint:

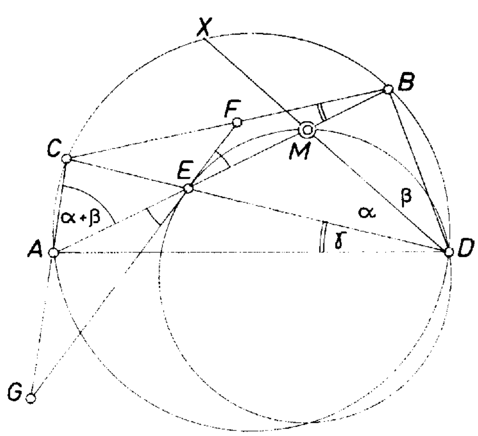
$$(2)\qquad EF/AC = EB/AX.$$

(1)-et (2)-vel elosztva:

$$(3)\qquad \frac{EG}{EF} = \frac{AE\cdot CB\cdot AX}{EB\cdot AC\cdot XB}.$$

Lemma: Egy $ACBD$ konvex húrnégy szög AB és CD átlóinak metszéspontja E. Ekkor:

$$CB\cdot AE\cdot BD = AC\cdot EB\cdot AD.$$



Bizonyítás: Az ADE háromszögben a szinusztételből:

$$AE/\sin ADE\sphericalangle = AD/\sin AED\sphericalangle,$$

azaz $(*)$ szerint

$$(\mathrm{L}_1)\qquad AE/AC = AD/\sin AED\sphericalangle.$$

Az EBC háromszögben hasonlóan

$$EB/\sin BCE\sphericalangle = CB/\sin CEB\sphericalangle = CB/\sin AED\sphericalangle,$$

$$(\mathrm{L}_2)\qquad EB/BD = CB/\sin AED\sphericalangle.$$

Az (L_2) egyenletet az (L_1) egyenlettel elosztva és rendezve a bizonyítandó állítást kapjuk.

Lemmánkat az $ACBD$ és $AXBD$ négyszögekre alkalmazva:

$$CB \cdot AE \cdot BD = AC \cdot EB \cdot AD,$$
$$XB \cdot AM \cdot BD = AX \cdot MB \cdot AD.$$

A második egyenletet az elsővel elosztva:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AE \cdot CB \cdot AX}{XB \cdot EB \cdot AC},$$

amelyet (3)-mal összevetve:

$$\frac{EG}{EF} = \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{AB - AM} = \frac{t}{1-t}.$$

*M*egjegyzés. A feladat elolvasása és az ábra felrajzolása után mindjárt az a benyomásom támadt, hogy itt olyan sok szép egyenlő szög van, hogy elképzelhetetlen, hogy a megoldást ne lehetne valahogyan „kiszenvedni”. Sajnos, elegáns megoldást nem találván, tényleg ezt kellett tennem. Így versenydolgozatomban a szinusztételt 8 háromszögre alkalmaztam, majd ezek „cseles” összeszorzásával rengeteg tag kiesett és a bizonyítandó állítást kaptam. Az itt közölt megoldásbeli lemmát Pataki János javaslatára használom fel, ez a megoldást jóval áttekinthetőbbé teszi (azért a háttérben ugyanazok a szinusztételek vannak).