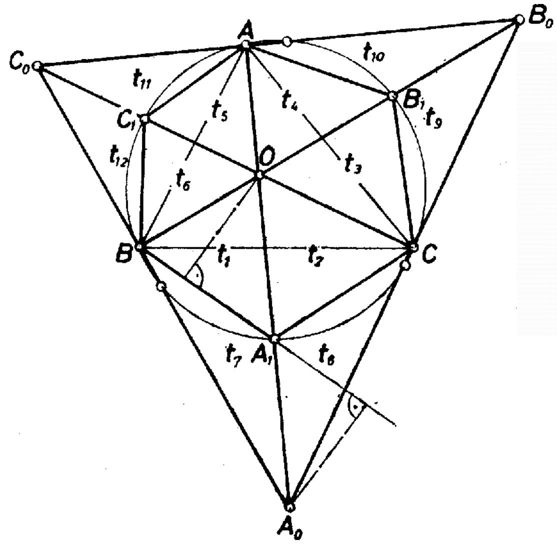
Mivel a háromszög egy szögének külső és belső szögfelezője merőleges egymásra, az A, B, C pontok az $A_0B_0C_0$ háromszögben a magasságvonalak talppontjai. Ismeretes, hogy egy háromszög Feuerbach-köre áthalad a magasságok talppontjain, az ABC háromszög köré írt köre tehát az $A_0B_0C_0$ háromszög Feuerbach-köre. A Feuerbach-kör áthalad az OA_0, OB_0, OC_0 felezőpontján is, ezért $OA_1 = A_1A_0$, $OB_1 = B_1B_0$, $OC_1 = C_1C_0$.



3. ábra

Jelöljük a kis háromszögek területét t_i-vel ($i = 1, 2, \ldots 12$) az ábra szerint. Így $t_1 = t_7$, mert a két háromszög alapja és magassága egyenlő. Ugyanígy kapjuk, hogy $t_2 = t_8$, $t_3 = t_9$, $t_4 = t_{10}$, $t_5 = t_{11}$, $t_6 = t_{12}$. Ezeket összeadva:

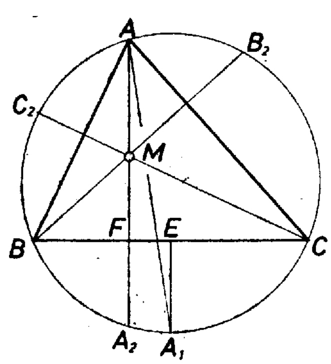
$$t_1 + t_2 + \ldots + t_6 = t_7 + t_8 + \ldots + t_{12}.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva az egyenlet bal oldalát:

$$2(t_1 + t_2 + \ldots + t_6) = t_1 + t_2 + \ldots + t_{12}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

A második állítás igazolásához ezután elegendő belátni, hogy az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög területe legalább kétszerese az ABC háromszög területének.



4. ábra

Jelöljük az ABC háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkoztatott tükörképeit rendre A_2, B_2, C_2-vel. Ismert, hogy ezek a pontok a körülírt körön vannak. Az A_1 pont a BC ív (A-t nem tartalmazó ívének) felezőpontja, mert BA_1 és CA_1 ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők, tehát az A_1E szakasz (E a BC szakasz felezőpontja) nem kisebb az A_2F szakasznál (F az A_2 vetülete BC-re).

Ezért $t_{BA_1C} \geqq t_{BA_2C}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $t_{CB_1A} \geqq t_{CB_2A}$, $t_{AC_1B} \geqq t_{AC_2B}$. Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva

$$t_{BA_1C} + t_{CB_1A} + t_{AC_1B} \geqq t_{BA_2C} + t_{CB_2A} + t_{AC_2B}.$$

A jobb oldalon éppen az ABC háromszög területe áll, mert a kis háromszögeket tükrözve az oldalegyenesekre A_2, B_2, C_2 pontok tükörképe éppen a magasságpont, és így a tükörképek egyrétűen fedik le az ABC háromszöget.

Azaz

$$t_{BA_1C} + t_{CB_1A} + t_{AC_1B} \geqq t_{ABC}.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva t_{ABC}-t

$$t_{ABC} + t_{BA_1C} + t_{CB_1A} + t_{AC_1B} \geqq 2t_{ABC}.$$

Így éppen a bizonyítandó állítást kapjuk, mert a bal oldal 4 háromszöge éppen lefedi az $AC_1BA_1CB_1$ hatszöget.

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha A_1 és A_2, B_1 és B_2, C_1 és C_2 egybeesik, ami azt jelenti, hogy a háromszög minden alapról nézve egyenlő szárú, tehát szabályos. Szabályos háromszögben pedig nyilván fennáll az egyenlőség.