I. megoldás. A következő megoldást sajnos nem a versenyen, hanem utána, este találtam. Ekkor már tudtam azt, hogy a végtelen leszállás elvével kijön a feladat. Erre a módszerre igazság szerint magamtól is gondolhattam volna, hiszen két hazai válogatóversenyen szükség volt rá.

Tegyük fel, hogy a $a \leqq b$. Osszuk el b-t maradékosan a-val: $b = qa + r$ (q, r egész; $0 \leqq r < a$). Ekkor

$$ab + 1 = qa^2 + ra + 1, \text{ és}$$
$$a^2 + b^2 = a^2 + q^2a^2 + 2ar + r^2.$$

A feltétel szerint $ab + 1 | a^2 + b^2$. Legyen a hányados k, azaz

$$k(qa^2 + ra + 1) = a^2 + q^2a^2 + 2qar + r^2.$$

Másrészt:

$$q(qa^2 + ra + 1) = q^2a^2 + qar + q.$$

A felső egyenletből az alsót kivonva:

$$(k - q)(qa^2 + ra + 1) = a^2 + qra + r^2 - q. \tag{1}$$

Most két esetet különböztetünk meg:

I. $r = 0$ (azaz $a|b$),

II. $r \neq 0$ (azaz $a \nmid b$).

Mind a két esetben (1) jobb oldalát fogjuk alulról és felülről úgy megbecsülni, hogy ennek, mint $(qa^2 + ra + 1)$ többszörösének, már csak egy lehetséges értéke marad.

I. eset. $r = 0$. (1) most így alakul:

$$(k - q)(qa^2 + 1) = a^2 - q.$$

Könnyen látható, hogy:

$$-(qa^2 + 1) < a^2 - q < qa^2 + 1,$$

tehát

$$a^2 - q = 0, \text{ és } k - q = 0.$$

Ez utóbbiakból: $k = a^2$, azaz valóban négyzetszám.

Látható az is, hogy az $a \mid b$ esetben csak a $b = a^3$ lehetséges, és az a, a^3 számpár kielégíti a feltételt.

II. eset. $r \neq 0$. Megmutatjuk, hogy ekkor:

$$0 < a^2 + qra + r^2 - q < 2(qa^2 + ra + 1).$$

A bal oldali egyenlőtlenség abból következik, hogy $a^2 + r^2 > 0$, és $qra - q \geqq 0$. (Itt használjuk ki, hogy $r > 0$.) A jobb oldali céljára:

$$2qa^2 > a^2 + qra, \quad (r < a)$$
$$2ra > r^2,$$
$$2 > -q,$$

ezeket összegezve megkapjuk a jobb oldali egyenlőtlenséget, és így (1)-ben csak

$$qa^2 + ra + 1 = a^2 + qra + r^2 - q \quad \text{ és } \quad k - q = 1$$

lehetséges. Átrendezve:

$$a^2 + (a - r)^2 = (q + 1)(a(a - r) + 1). \tag{2}$$

$r < a$ miatt $a - r > 0$, így a és $(a - r)$ is pozitív egész. Az a, b számokból kiindulva találtunk egy másik számpárt, a-t és $(a - r)$-et, amelyre

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{(a - r)^2 + a^2}{(a - r)a + 1},$$

és ebben az új számpárban a számok minimuma, $(a-r)$ kisebb, mint az eredeti számpárban (a). Ha most $a-r|a$, akkor az I. eset szerint k négyzetszám. Ha pedig $a - r \nmid a$, akkor a II. eset szerint tovább tudjuk csökkenteni a minimumot. Az eljárást folytatva előbb-utóbb az I. esethez kell eljutnunk, ha előbb nem, akkor, amikor a két szám minimuma 1 lesz.

Ezzel beláttuk, hogy k csak négyzetszám lehet.

Nézzük még meg, milyen számpárok elégítik ki a feladat feltételeit! Figyelembe véve, hogy a II. pont eljárásával előbb-utóbb minden megoldásból egy $(a,\ a^3)$ típusú megoldáshoz jutunk, az eljárást (a II. esetbelit) megfordítva kapjuk, hogy a megoldások az

$$a_1 = a, \quad a_2 = a^3, \quad a_{n+2} = a^2a_{n+1} - a_n$$

típusú sorozatok szomszédos elemeiből álló számpárok.

Bíró András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o.t.)

A 6. feladat több szempotból is a legnehezebbnek bizonyult a versenyen. A magyar csapat például mindössze egyetlen pontot szerzett ezen a feladaton. Ennél talán többet mond, hogy az olimpiai bizottság tagjai közül – ez a bizottság hat kiválló ausztrál matematikusból állt, és ők választották ki a részt vevő országok javaslataiból azt a 31 feladatot, amelyik a nemzetközi zsűri elé került – senki sem tudta megoldani.

Hosszas vita után végül kitűzték. Sokan fogadtak arra, hogy nem, vagy alig lesz jó megoldás, és majd mindenki veszített. Végül 11 (!) versenyző oldotta meg helyesen a feladatot. A szerzők mindegyike így vagy úgy a végtelen leszállás módszerével jutott el a megoldáshoz. Az alábbiakban a bolgár *Emanuel Atanaszov* különdíjas megoldását ismertetjük, aki talán a legelegánsabban nyúlt a problémához.

II. megoldás. Jelöljük a hányados értékét K-val és rendezzük át a feltételt. Így az

$$a^2 - Kab + b^2 = K \tag{1}$$

összefüggéshez jutunk. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, a K nem négyzetszám, és tekintsük az

$$x^2 - Kxy + y^2 = K \tag{2}$$

kétismeretlenes diofantoszi egyenletet, amelynek feltételünk szerint létezik pozitív egész $(a; b)$ számokból álló megoldása.

Vegyük észre, hogy (2)-nek nem lehetnek ellenkező előjelű megoldásai, hiszen ekkor a bal oldalon

$$-Kxy > K \text{ és } x^2 - y^2 > 0.$$

Olyan megoldása sincs a (2) egyenletnek, ahol az egyik szám 0 volna, hisz ekkor a bal oldal értéke négyzetszám. (Lényegében itt használjuk fel az indirekt föltevést!)

Tekintsük most a (2) egyenletnek azt a pozitív $(A,\ B)$ megoldását, amelyre a két szám közül a nem nagyobb – legyen ez B – *minimális.* Ilyen létezik és az előbbiek szerint $A \geqq B > 0$.

A (2)-ben y helyére B-t helyettesítve az immár egyismeretlenes

$$x^2 - KBx + B^2 - K = 0 \tag{3}$$

egyenletet kapjuk, amelynek tehát az A megoldása. A másodfokú (3) egyenlet másik, A' gyökére

$$A + A' = KB,$$

tehát A' is egész.

Az (A', B) számpár is megoldása (2)-nek, a B pozitív, így az A' is az. A gyökök és együtthatók közti másik összefüggésben a gyökök szorzata pozitív:

$A'A = B^2 - K > 0$, ahonnan

$0 < A'A < B^2$, vagyis

$A \geqq B$ miatt $A' < B$!

Abból a feltevésből kiindulva, hogy a K nem négyzetszám, találtunk a (2) egyenletre egy másik megoldást, az $(A'B)$ számpárt, ahol $0 < A' < B$, ellentétben az (A, B) megoldásra előírt kikötésünkkel. Ez azt jelenti, hogy a K valóban négyzetszám.