Legyen a beírt körök középpontja O_1, ill. O_2 (lásd ábra).

1988-10-296-1.eps

Az ábra azt a sejtést sugallja, hogy az AKL egyenlő szárú derékszögű háromszög. (A versenyen úgy emlékeztem, mintha ez éppen egy KÖMAL feladat lett volna, noha csak ehhez hasonló volt a Gy. 2395., 37. évf. 7. szám, 310. o.). Semmi elképzelésem nem volt, hogy ha be tudnám ezt bizonyítani, akkor miért segítene, de más nem jutott eszembe, így megpróbáltam igazolni. Azaz feltettem, hogy $AK=AL$. Ebből $ALO_2\sphericalangle=45^\circ=O_2DC\sphericalangle$, ekkor (és csak ekkor!) $DCLO_2$ húrnégyszög! $DCLO_2$ húrnégyszög pl. akkor, ha $LCD\sphericalangle=O_1O_2D\sphericalangle$! Ennek igazolásához pedig csak azt kell észrevenni, hogy az a D körüli $+90^\circ$-os forgatvanyújtás, amely az ADC háromszöget a BDA háromszögbe viszi, nyilván O_2-nek O_1-et felelteti meg. O_1O_2D háromszög derékszögű, és a befogók aránya egyenlő az ADC háromszög befogóinak arányával, így ezek hasonlóak. Kapjuk tehát, hogy $O_1O_2D\sphericalangle=ACD\sphericalangle$. Ezzel beláttam, hogy $ALK\sphericalangle=AKL\sphericalangle=45^\circ$. Ezek után AO_2 és AO_1 szögfelező voltának kihasználásával az $AK=AD=AL$ egyenlőséget kaptam. (Ezt rövidebben lehet igazolni, ugyanis elegendő, ha csak az $ALO_2\sphericalangle=ADO_2\sphericalangle$ egyenlőséget vesszük észre.)

A megoldást ezek után borzasztóan el lehet bonyolítani, ahogy én is tettem. Kitértem ugyanis arra, hogy $KO_1=O_1D$, és $DO_2=O_2L$, így KL hossza épp a DO_1O_2 háromszög kerülete. Ezek után – észrevéve, hogy a DO_1O_2 háromszög az eredeti ABC háromszöghöz is hasonló – felírtam DO_1O_2 és ABC hasonlóságának arányát, végül ABC háromszög oldalaival kifejeztem KL hosszát, s mindebből számoltam ki T-t. Az $S\geqq 2T$ egyenlőtlenség igazolása ezek után igazán egyszerű volt. (A koordinátornak állítólag nagyon tetszett a $DO_1O_2\ \triangle\sim ABC\ \triangle$ eredmény, lévén hogy ennek a feladathoz nem sok köze van.)

Nézzük most „a megoldást”! Betűzzük az oldalakat az ábra szerint. AD hossza ekkor nem más, mint $\frac{cb}{a}$. (Ez a kétszeres terület kétféle felírásából adódik: $bc=a\cdot AD$.) T-re ezek után a

$$T=\frac{c^2b^2}{2a^2}$$

eredményt kapjuk. $S\geqq 2T$ így írható:

$$2\frac{c^2b^2}{2a^2}\leqq\frac{1}{2}bc.$$

Rendezés és $a^2=b^2+c^2$ (Pitagorasz tétele) helyettesítés után:

$$2bc\leqq b^2+c^2$$

Ez utóbbi pedig $(b-c)^2\geqq 0$-val ekvivalens.

Sustik Mátyás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)