Vezessük be a következő jelöléseket:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k};\ I_0=(-\infty,1),\ I_1=(1,\ 2),\quad I_2=(2,\ 3),\ \ldots$$
$$\ldots,\ I_i(i,\ i+1),\ \ \ldots,\ \ I_{69}=(69,\ 70),\ \ I_{70}=(70,\ +\infty).$$

Az $f(x)$ értelmezési tartománya $I_0\cup I_1\cup\ldots\cup I_{70}$, mivel $f(x)$ az $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 70$ értékek kivételével nyilván mindenütt értelmes. $f(x)$ az értelmezési tartományában folytonos, mert folytonos függvények összegeként áll elő.

1988-10-294-1.eps

Az egyes intervallumokban $f(x)$ szigorúan monoton csökken, hiszen szigorúan monoton csökkenő függvények $\left(\frac{1}{x-1},\ \frac{2}{x-2},\ \ldots,\ \frac{70}{x-70}\right)$ összegeként áll elő.

I_0-ban a függvény csak negatív értékeket vesz fel, az $\frac{1}{x-1},\ \frac{2}{x-2},\ \ldots,\ \frac{70}{x-70}$ törtek mindegyike negatív ebben az intervallumban.

Az $I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_{69}$ intervallumban $f(x)$ minden valós értéket felvesz, az egyes intervallumokon belül $f(x)$ folytonos, másrészt, mint azt látni fogjuk, az intervallumok bal oldalán $f(x)$ jobb oldali határértéke $+\infty$; az intervallumok jobb oldalán $f(x)$ bal oldali határértéke $-\infty$. Ezt a következő módon láthatjuk be: legyen „a” az 1, 2, 3, ..., 70 egészek bármelyike. Ekkor

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a+0}\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}=\sum_{k=1}^{70}\lim_{x\to a+0}\frac{k}{x-k}=+\infty,$$

$k=a$ esetén

$$\lim_{x\to a+0}\frac{k}{x-k}=\lim_{x\to a+0}\frac{a}{x-a}=+\infty,$$

minden más esetben $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{k}{x-k}$ véges. Hasonlóképpen igaz, hogy $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=-\infty$.

Már láttuk, hogy $f(x)$-nek az $x=70$ helyen vett jobb oldali határértéke $+\infty$. Másrészt igaz az is, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, hiszen $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sum\limits_{k=1}^{70}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{k}{x-k}=\sum\limits_{k=1}^{70}0=0$. Így az I_{70} intervallumban a függvény minden pozitív értéket felvesz.

A függvény menete tehát a következő (vázlatosan):

Az $f(x)=\frac{5}{4}$ egyenletnek tehát az I_0 intervallum kivételével mindegyik intervallumban van megoldása, a szigorú monotonitás miatt minden intervallumban pontosan egy. A gyökök legyenek rendre $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{70}$. Ekkor $1<x_1<2<x_2<3<\ldots<70<x_{70}$.

Az $f(x)\geqq\frac{5}{4}$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza ekkor nyilván az $(1,\ x_1]\cup(2,\ x_2]\cup\ldots\cup(70,\ x_0]$ halmaz. Ezek valóban diszjunkt intervallumok, összhosszuk:

$$S=(x_1-1)+(x_2-2)+\ldots+(x_{70}-70)=(x_1+x_2+\ldots+x_{70})-(1+2+\ldots+70)$$

Hozzuk közös nevezőre a

$$-\frac{5}{4}+f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\ldots+\frac{70}{x-70}-\frac{5}{4}$$

összeget.

$$-\frac{5}{4}+f(x)=\frac{1\cdot(x-2)(x-3)\ldots(x-70)+2\cdot(x-1)(x-3)\cdot\ldots\cdot(x-70)}{(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-70)}+$$
$$+\ldots+\frac{70(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-69)}{(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-70)}-\frac{\frac{5}{4}(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-70)}{(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-70)};$$

(A két sor egyetlen törtnek tekintendő.) A számláló egy 70-ed fokú polinom, főegyütthatója $a_{70}=-\frac{5}{4}$. A 69-ed fokú tag együtthatója:

$$a_{69}=1+2+\ldots+70+\frac{5}{4}(1+2+\ldots+70)=\frac{9}{4}(1+2+\ldots+70).$$

Másrészt az $f(x)=\frac{5}{4}$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az $f(x)-\frac{5}{4}$ tört számlálója 0, így az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{70}$ gyökök megegyeznek a fenti tört számlálójában szereplő polinom gyökeivel, így összegük is megegyezik. A Vieta-formula [1]szerint

$$x_1+x_2+\ldots+x_{70}=\frac{-a_{69}}{a_{70}}=\frac{-\frac{9}{4}(1+2+\ldots 70)}{-\frac{5}{4}}=\frac{9}{5}(1+2+\ldots 70).$$

Az intervallumok összhossza tehát:

$$S=\frac{9}{5}(1+2+\ldots+70)-(1+2+\ldots+70)=\frac{4}{5}(1+2+\ldots+70)=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot 71\cdot 70\cdot\frac{1}{2}=2\cdot 71\cdot 14=1988,$$

és ezt kellett bizonyítani.

Drasny Gábor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

[1]Legyen az $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ komplex együtthatós polinom gyöktényezős alakja

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n);$$

az együtthatók összehasonlítása alapján adódó összefüggések:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-a_1,$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=a_2,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n=(-1)^n a_n.$$

Ezeket nevezzük Viéta-formuláknak.