I. Legyen O a két kör középpontja. Tegyük fel, hogy P, O, B nincsenek egy egyenesen. Messe PB az r sugarú kört másodszor Q-ban. Mivel B és C szerepe felcserélhető, feltehetjük, hogy Q a P és B között fekszik. P-ből QA 90° alatt látszik, tehát QA átmérő. $CP = QB = a$ (hiszen pl. $CPO\triangle \simeq BQO\triangle$, két oldal és a nagyobbikkal szemközti szögben megegyezik).

1988-10-291-1.eps

1988-10-291-2.eps

A Pitagorasz-tételt alkalmazva:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = PA^2 + (PQ + a)^2 + (PQ + 2a)^2 + PA^2 + a^2 =$$
$$= 2(PA^2 + PQ^2) + 6a(a + PQ).$$

Viszont a PQA háromszögből $PA^2 + PQ^2 \simeq 4r^2$, P-nek az R sugarú körre vonatkozó hatványa

$$a(a + PQ) = CP \cdot PB = R^2 - r^2,$$

tehát $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 6R^2 + 2r^2$ még akkor is, ha C, P, O, B egy egyenesen vannak. A vizsgált érték tehát állandó.

II. Jelöljük B-nek a PA felezőmerőlegesére való tükörképét B'-vel. B' az R sugarú körön van, mivel f mindkét körnek szimmetriatengelye. $PAB'B$ téglalap, $PB = AB'$ és $APB\sphericalangle = PAB'\sphericalangle = 90^\circ$, így AB felezőpontja egybeesik PB' felezőpontjával. Ahogy B körbefut, B' is, így AB felezőpontja az R sugarú kör P-ből felére kicsinyített képén fekszik. Az extrém esetben e kör egy átmérője végpontjain.

Beke Tibor (Nagyatád, Ady E. Gimn., III. o. t.)