6. feladat. *Adott a síkban egy véges sok rácspontból álló halmaz. Döntsük el, vajon minden esetben lehetséges-e ezek közül a pontok közül néhányat pirosra, a többit pedig fehérre színezni úgy, hogy minden olyan egyenesen, amely párhuzamos valamelyik koordináta-tengellyel, a rajta lévő piros pontok száma legfeljebb* 1*-gyel térjen el az ugyancsak rajta lévő fehér pontok számától.*

Megoldás. A pontok számára vonatkozó teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy mindig létezik a kívánt színezés. Egy pont esetén az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy $n \geq 2$, és n-nél kevesebb pont esetén kiszínezhetők a pontok az előírt módon, és megadjuk az n pontnak egy megfelelő színezését.

Könnyű dolgunk van, ha található olyan P pont, melynek sorában további pont már nincs. Ekkor P-t elhagyva a megmaradt $(n-1)$ pontot színezzük ki a megfelelő módon, és ha P oszlopában legalább annyi piros pont van, mint fehér, akkor P-t színezzük fehérre, ha eggyel több fehér pont van, mint piros, akkor pedig pirosra. Ekkor az n pontnak egy jó színezését kaptuk, hiszen P sorában és oszlopában teljesül a feltétel, a többi sorban és oszlopban pedig nem történt változás. Hasonló a helyzet, ha van olyan P pont, melynek oszlopában nincs további pont. Vizsgáljuk tehát azt a fennmaradó esetet, amikor minden pont sorában és oszlopában is van további pont. Ekkor egy tetszőleges A_1 pontból kiindulva, annak sorában választhatunk egy tőle különböző A_2 pontot, A_2 oszlopában A_3-t, A_3 sorában A_4-t, és így tovább felváltva. Minthogy véges sok (n) pontunk van, véges sok lépés után az A_1, A_2, $\ldots$ pontsorozatban olyan tagot kell választanunk, amely már szerepelt. Legyen tehát $A_r = A_p$ $(r > p)$ az első ilyen ismétlődés. Ha $r-p$ páros, akkor az A_p, A_{p+1}, $\ldots$, A_{r-1} sorozatban minden tag az egyik szomszédjával egy sorban, a másikkal egy oszlopban van (ha A_{r-1}-t és A_p-t is szomszédoknak tekintjük). Gondoljunk utána, hogy ha $r-p$ páratlan, akkor ugyanez mondható az A_{p+1}, A_{p+2}, $\ldots$ A_{r-1} sorozatról. Hagyjuk el tehát ezen sorozat pontjait, a maradékot az indukciós feltétel szerint kiszínezhetjük a kívánt módon, a sorozat pontjait pedig színezzük ezután felváltva pirosra, ill. fehérre. Ekkor az n pontnak egy jó színezését kapjuk, hiszen minden sorban és oszlopban ugyanannyival változtatjuk meg a piros, ill. fehér pontok számát. Ezzel az indukciós lépést elvégeztük, a feladat kérdésére igenlő választ adhatunk.