5. feladat. *Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely a nem-negatív valós számok R_0^+ halmazán van értelmezve, csak nem-negatív valós értéket vesz fel és teljesíti a következő három feltételt:*

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad f\big(x\cdot f(y)\big)\cdot f(y)=f(x+y) \quad \textit{minden} \quad x,\ y\in R_0^+ \quad \textit{esetén};\\
&(b)\quad f(2)=0;\\
&(c)\quad f(x)\neq 0, \quad \textit{ha} \quad 0\le x<2.
\end{aligned}
$$

Megoldás. Először két egyszerű megállapítást teszünk. Egyrészt $f(0)=1$, hiszen az (a) feltételt $x=y=0$ esetén alkalmazva $f(0)=f\big(0\cdot f(0)\big)\cdot f(0)=f(0)^2$, tehát $f(0)$ értéke csak 0 vagy 1 lehet, de az első lehetőséget a (c) feltétel kizárja. Másrészt $x\ge 2$ esetén $f(x)=0$ adódik könnyen, ha az (a) feltételbe $x-2$ és 2 értékeket írunk: $f(x)=f\big((x-2)\cdot f(2)\big)\cdot f(2)=0$ a (b) feltétel miatt.

Tegyük fel most, hogy $0<x<2$, ekkor persze $0<2-x<2$ is teljesül és így az (a) feltételt alkalmazva a $2-x$ és x számokra $f\big((2-x)\cdot f(x)\big)\cdot f(x)=f(2)=O$ adódik. Itt (c) miatt $f(x)\neq 0$, $\big((2-x)\cdot f(x)\big)=0$, tehát ismét csak (c)-t alkalmazva a $(2-x)\cdot f(x)\ge 2$, $f(x)\ge \dfrac{2}{2-x}$ egyenlőtlenséget kapjuk. A továbbiakban belátjuk, hogy itt egyenlőség áll. Tegyük fel ugyanis, hogy valamely $0<y<2$ esetén $f(y)>\dfrac{2}{2-y}$, vagyis $f(y)=\dfrac{2}{2-y}+d$, ahol d pozitív. Ekkor található olyan x pozitív szám, melyre $\dfrac{2}{f(y)}=\dfrac{2}{\frac{2}{2-y}+d}<x<2-y$. Erre az x, y párra $x+y<2$, tehát $f(x+y)>0$; valamint $x\cdot f(y)>2$, $f\big(x\cdot f(y)\big)=0$ áll fenn. Így az (a) feltétel nem teljesül rájuk, és ez az ellentmondás mutatja, hogy valóban minden $0<y<2$ esetén $f(y)=\dfrac{2}{2-y}$. Az eddigiek során tehát megállapítottuk, hogy a feladat feltételeinek csak a következő függvény tehet eleget:

$$
f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-x}, & \text{ha} \quad 0\le x<2,\\ 0, & \text{ha} \quad x\ge 2.\end{cases}
$$

Most már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy ez a függvény valóban megfelel-e a követelményeknek. Ezt azonban az olvasóra bízzuk, könnyen látható, hogy ez a függvény jó.