4. feladat. *Legyenek A és B egy O középpontú szabályos n-szög ($n \geq 5$) szomszédos csúcsai. Egy, az OAB háromszöggel egybevágó XYZ háromszöggel először befedjük OAB-t, majd az X pontot úgy mozgatjuk – mindig az n-szög belsejében –, hogy eközben az Y és Z pontok állandóan az n-szög oldalain legyenek. Milyen alakzatot ír le X, ha Y befutja az n-szög határát (kerületét)?*

1986-11-357-1.eps

Megoldás. Állítjuk, hogy a keresett ponthalmaz n darab zárt szakaszból áll, amelyek hossza $OB\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}-1\right)$, és amelyek az n-szög csúcsait O-val összekötő szakaszok O-n túli meghosszabbításai.

Ha Y és Z két szomszédos csúccsal esik egybe, akkor $X \equiv O$; a többi esetben X két szomszédos oldal által határolt kisebbik szögtartományban helyezkedik el (ennek igazolásától most eltekintünk).

Legyen most Y az AB, Z pedig a vele szomszédos BC oldal belső pontja. Ekkor $YBZ\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \pi - \dfrac{2\pi}{n}$, $YXZ\sphericalangle = \dfrac{2\pi}{n}$, e két szög összege tehát π, vagyis az $XYBZ$ négyszög húrnégyszög. Mivel $XY = XZ$ az XBY és XBZ szögekhez egyenlő ívek tartoznak, ezért $XBY\sphericalangle = XBZ\sphericalangle$; az X pont az $YBZ\sphericalangle = ABC\sphericalangle$ szögfelezőjén helyezkedik el.

Vizsgáljuk most meg, mekkora lehet a BZ távolság! Először belátjuk, hogy $BX > OB$. Ugyanis $XYB\sphericalangle + XZB\sphericalangle = \pi$, így közülük az egyik legalább $\dfrac{\pi}{2}$, mondjuk $XZB\sphericalangle \geq \dfrac{\pi}{2}$. De $XBZ\sphericalangle < \dfrac{\pi}{2}$, ezért az XZB háromszögben ezen szögekkel szemben fekvő oldalakra $BX > XZ$ adódik $XZB\sphericalangle > XBZ\sphericalangle$ miatt. És itt $XZ = OB$. Másodszor BX szakasz hosszára felső becslés az $XYBZ$ húrnégyszög köré írható kör átmérője. Ez pedig a szinusztétel segítségével

$$\frac{YZ}{\sin YXZ\sphericalangle} = \frac{OB}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}\right)} = \frac{OB}{\cos\dfrac{\pi}{n}}.$$

Ehhez hozzávéve a megoldás elején említett $X \equiv A$, $Y \equiv B$, $Z \equiv O$ esetet,

$$0 \leq OX \leq \frac{OB}{\cos\dfrac{\pi}{n}} - OB = OB\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}-1\right)$$

adódik. Ha pedig gondolatmenetünket elvégezzük a többi szomszédos oldalpárra is, akkor kiderül, hogy X csakis a megoldás elején leírt ponthalmaz pontja lehet.

Hátravan még annak igazolása, hogy az említett halmaz minden pontja megfelelő. Legyen X' a BO félegyenesen úgy, hogy $OB < BX' \leq \dfrac{OB}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$. Rajzoljuk meg a B-n és X'-n átmenő, $\dfrac{OB}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$ átmérőjű körök valamelyikét (ha $BX' = \dfrac{OB}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$, akkor csak egy ilyen van). Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy ez a kör metszi az AB és BC szakaszokat. Jelöljük ezen metszéspontokat Y'-vel és Z'-vel. Mivel $Y'BX'\sphericalangle = X'BZ'\sphericalangle$, azért $X'Y' = X'Z'$. Másrészt mivel $X'Y'BZ'$ négyszög húrnégyszög, $Y'X'Z'\sphericalangle = \pi - Y'BZ'\sphericalangle = \dfrac{2\pi}{n}$. Ezért az $X'Y'Z'$ háromszög hasonló az ABO háromszöghöz, körülírt köreik pedig ugyanakkorák, ezért a két háromszög egybevágó. Ez a meggondolás bizonyítja, hogy a megadott ponthalmaz minden pontja jó.