3. feladat. *Egy szabályos ötszög csúcsaihoz egy-egy egész számot rendelünk úgy, hogy összegük pozitív legyen. Megengedett a következő művelet: ha három szomszédos csúcs X, Y, Z és a hozzájuk rendelt számok x, y, z, és $y<0$, akkor az x, y, z számok helyére ugyanilyen sorrendben az $x+y$, $-y$, $z+y$ számokat írjuk. Ezt a műveletet ismételgetjük addig, amíg csak található negatív y. Döntsük el, vajon minden esetben véget ér-e az eljárás véges sok lépés után!*

Megoldás. Az eljárás véges sok lépés után minden esetben véget ér, függetlenül attól, hogy milyen sorrendben végezzük el a lépéseket. Legyen az ötszög csúcsaihoz rendelt öt szám kezdetben a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, az n-edik „művelet" elvégzése után pedig a_n, b_n, c_n, d_n, e_n. Világos, hogy bármely lépés után a számok egészek maradnak, és összegük nem változik, tehát pozitív marad. Definiáljuk az S_n nem-negatív egész számot így:

$$S_n=(a_n-c_n)^2+(b_n-d_n)^2+(c_n-e_n)^2+(d_n-a_n)^+(e_n-b_n)^2.$$

Ha valamely k természetes számra az a_k, b_k, c_k, d_k, e_k számok között van negatív (mondjuk $c_k<0$), akkor a következő lépés után nyert $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=b_k+c_k$, $c_{k+1}=-c_k$, $d_{k+1}=d_k+c_k$, $e_{k+1}=e_k$ számokra $S_{k+1}<S_k$. Ugyanis behelyettesítéssel

$$S_{k+1}-S_k=2c_k(a_k+b_k+c_k+d_k+e_k),$$

és itt $c_k<0$, $a_k+b_k+c_k+d_k+e_k>0$, mint azt már említettük. Ez pedig azt jelenti, hogy S_0, S_1, S_2, ... szigorúan csökkenő nem negatív egész számok. Így sorozatuk csak véges hosszúságú lehet, vagyis az eljárás véges sok lépésben mindig véget ér.