2. feladat. *Adott az $A_1A_2A_3$ háromszög és a síkjában levő P_0 pont. Definiáljuk $s > 4$ esetén az A_s pontot így: $A_s = A_{s-3}$. A P_{n+1} pontot úgy nyerjük, hogy a P_n pontot A_{n+1} körül az óramutató járásával megegyező irányban 120°-kal elforgatjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha P_{1986} és P_0 megegyező pontok, akkor az $A_1A_2A_3$ háromszög szabályos.*

Megoldás. Vizsgáljuk meg először azt, hogy három egymást követő elforgatás során mi történik az $\overrightarrow{A_1P_0}$ vektorral. Bármelyik elforgatás a vektor irányát 120°-kal változtatja, hosszát pedig megtartja. Így ha a három elforgatás utáni $\overrightarrow{A_1'P_3}$ képét tekintjük, akkor $\overrightarrow{A_1P_0} = \overrightarrow{A_1'P_3}$ adódik. Tehát $A_1P_0P_3A_1'$ négyszög paralelogramma, $\overrightarrow{P_0P_3} = \overrightarrow{A_1A_1'}$. Hasonló gondolatmenettel adódik $\overrightarrow{P_3P_6} = \overrightarrow{A_1A_1'}$, általában $\overrightarrow{P_{3k}P_{3k+3}} = \overrightarrow{A_1A_1'}$ minden k természetes számra. Ezért $\overrightarrow{P_0P_{1986}} = = \overrightarrow{P_0P_3} + \overrightarrow{P_3P_6} + \ldots + \overrightarrow{P_{1983}P_{1986}} = 662 \cdot \overrightarrow{A_1A_1'}$, tehát, mivel $P_0 = P_{1986}$, $\overrightarrow{P_0P_{1986}}$ és így $\overrightarrow{A_1A_1'}$ is nullvektor, vagyis A_1 megegyezik A_1'-vel.

1986-11-356-1.eps

Most kövessük nyomon azt, hogyan nyerjük A_1'-t A_1-ből. Az A_1 körüli elforgatás helyben hagyja A_1-et, majd az A_2 körüli 120°-os elforgatás A_1''-be viszi. A_1''-t pedig az A_3 körüli (az előzővel megegyező irányú) elforgatás viszi $A_1 = A_1'$-be. Ezért az $A_1A_2A_1''A_3$ négyszög rombusz, melynek A_2-nél levő szöge 120°-os, így A_1-nél 60°-os szöge van. Tehát az $A_1A_2A_3$ háromszög, melynek A_1A_2 és A_1A_3 oldalai egyenlők, valóban szabályos.