1. Feladat. *Legyen d 2-től, 5-től és 13-tól különböző pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a $\{2, 5, 13, d\}$ halmaznak van két különböző a, b eleme, amelyre $ab-1$ nem négyzetszám.*

Megoldás. Elegendő belátni a következő állítást: ha d pozitív egész szám, akkor a $2d-1$, $5d-1$ és $13d-1$ számok közül valamelyik nem négyzetszám. Tegyük fel ugyanis ennek ellenkezőjét, vagyis hogy alkalmas a, b, c pozitív egész számokkal

$$2d-1=a^2 \tag{1}$$

$$5d-1=b^2 \tag{2}$$

$$13d-1=c^2. \tag{3}$$

(1)-ből leolvasható, hogy a páratlan. Ekkor a^2 4-gyel osztva 1-maradékot ad, és így d is páratlan. Most (2)-t és (3)-at tekintve adódik, hogy b és c páros. Vonjuk le (3)-ból (2)-t:

$$8d=c^2-b^2, \tag{4}$$

$$2d=\frac{c+b}{2}\cdot\frac{c-b}{2}. \tag{5}$$

Ha b és c közül egyik 4-gyel osztható, másik pedig 2 maradékot ad 4-gyel osztva akkor (5) jobb oldalának mindkét tényezője páratlan, ez tehát nem lehet. Ha viszont b és c 4-gyel osztva ugyanazt a maradékot adja, akkor (5) mindkét tényezője páros, amiből d páros volta következik. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat.