Legyen $s=\{x_0,\ x_1,\ \dots\}$ egy megfelelő számsorozat, és legyen

$$S_n=\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}.$$

Minden ilyen $s$ sorozatra tekintsük azt az $s^{(1)}=\{y_0,y_1,\dots\}$ sorozatot, amelyet az

$$y_i=\frac{x_{i+1}}{x_1},\quad i=0,1,2,\dots$$

összefüggés definiál. Nyilvánvalóan $s^{(1)}$ is megfelelő sorozat, azaz $y_0=1$ és $0<y_{i+1}<y_i$ az $i\geq 0$ esetén, továbbá

$$\begin{aligned}S_n^{(1)}&=\frac{y_0^2}{y_1}+\frac{y_1^2}{y_2}+\ldots+\frac{y_{n-1}^2}{y_n}=\frac{1}{x_1}\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_{n+1}}\right)=\\&=\frac{1}{x_1}\left(S_{n+1}-\frac{x_0^2}{x_1}\right)=\frac{1}{x_1}\left(S_{n+1}-\frac{1}{x_1}\right),\end{aligned}$$

hiszen $x_0=1$.

Belátjuk, hogy a feladat (a) állítása nemcsak 3,999-re, hanem minden 4-nél kisebb pozitív $a$ számra teljesül. Valóban, tegyük fel, hogy mégis volna olyan megfelelő $s$ számsorozat, melyre minden $n$-re $S_n<a$ teljesül. Ekkor a fent definiált $s^{(1)}$ sorozat olyan, hogy minden $n$-re

$$S_n^{(1)}=\frac{1}{x_1}\left(S_{n+1}-\frac{1}{x_1}\right)<\frac{1}{x_1}\left(a-\frac{1}{x_1}\right)=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{x_1}\right)^2\leqq 4\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2.$$

Az $s^{(1)}$-ből ugyanilyen módon képzett $s^{(2)}$ sorozatra

$$S_n^{(2)}<\frac{\left(a^2/4\right)^2}{4}=4\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^4,$$

s általában ha az $s^{(k+1)}$ sorozatot a fenti mintára kapjuk az $s^{(k)}$ sorozatból, akkor minden $n$-re

$$S_n^{(k+1)}<\frac{1}{4}\left(4\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^{2^k}\right)^2=4\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^{2^{k+1}}.$$

Indirekt feltevésünk szerint $a<4$, tehát $a/4<1$, így a jobb oldal elég nagy $k$-ra kisebb 1-nél. De ez lehetetlen, hiszen ha $s^{(k+1)}=\{z_0,z_1,\dots\}$, akkor például

$$S_0^{k+1}=\frac{z_0^2}{z_1}=\frac{1}{z_1}>1.$$

Ezzel a feladat (a) állítását bebizonyítottuk.

Legyen most $s=\{x_0,x_1,\dots\}$ olyan megfelelő sorozat, melyre $S_n<4$ minden $n$-re. Az előbbieket $a=4$-re alkalmazva kapjuk, hogy az $s^{(1)}$ sorozatra

$$S_n^{(1)}<\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{x_1}\right)^2=4-\left(2-\frac{1}{x_1}\right)^2$$

minden $n$-re. Az előbb láttuk, hogy $4-\left(2-\dfrac{1}{x_1}\right)^2<4$ nem lehetséges, így $x_1$csak $1/2$ lehet. Ekkor az $s^{(1)}$ sorozat tagjai rendre 1, $2x_2$, $2x_3$, …. Mivel az $s^{(1)}$ sorozatra is igaz, hogy $S_n^{(1)}<4$ minden $n$-re, azért az $s^{(1)}$ sorozat második tagja, $2x_2$, csak $1/2$ lehet. Ezért $x_2=1/4$, és az $s^{(2)}$ sorozatra, melynek tagjai így 1, $4x_3$, $4x_4$, …, $S_n^{(2)}<4$ teljesül minden $n$-re. Ezt folytatva kapjuk, hogy ha van olyan megfelelő sorozat, mely teljesíti a feladat (b) részének feltételeit, akkor az csak az 1, $1/2$, $1/4$, …, $1/2^n$, … sorozat lehet, ez pedig könnyen láthatóan jó. Így nemcsak megadtunk ilyen sorozatot, hanem azt is bizonyítottuk, hogy csak egy ilyen van.