Az a feltétel, hogy a $A_1A_2A_3$ háromszög nem egyenlő szárú, biztosítja, hogy a kérdéses egyenesek léteznek és különbözők. Tükrözzük a háromszög a_1 oldalegyenesét az A_1 csúcsból induló belső szögfelezőre. A kapott b_1 egyenes érinti a k beírt kört, mégpedig T_1 pont tükörképében, azaz S_1-ben, továbbá érinti a háromszög a_1-hez hozzáírt k_1 körét is (1. ábra).

1984-01-008-1.eps

1. ábra

Tekintsük az M_1 középpontú, $M_1T_1=M_1V_1$ sugarú körre vonatkozó *inverziót.* Ez az inverzió helyben hagyja a k és k_1 köröket, hiszen mindkettő merőleges az inverzió alapkörére: a T_1, illetve V_1 metszéspontokból a középpontokba mutató sugarak merőlegesek egymásra. Állítjuk, hogy a b_1 egyenes inverze éppen a háromszög *Feuerbach*-köre. Ebből a feladat állítása következik. Mivel b_1 érinti k-t és k_1-et is, azért b_1 inverze érinti k-nak, valamint k_1-nek inverzét, következésképp

egy háromszög Feuerbach-köre érinti a háromszög beírt körét, továbbá a három hozzáírt kört is.

A beírt kör és a Feuerbach-kör érintési pontja inverz képe annak a pontnak, ahol b_1 és k érinti egymást, vagyis az S_1 pontnak, és így rajta van az M_1S_1 egyenesen. Ugyanez az érintési pont rajta van az M_2S_2, M_3S_3 egyeneseken is, s így M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 valóban egy ponton mennek át, ahogyan a feladat állította.

Annak igazolása maradt még hátra, hogy b_1 inverz képe a háromszög Feuerbach-köre. Mivel b_1 nem megy át az inverzió középpontján, M_1-en ($a_2\neq a_3$ miatt), b_1 inverze egy M_1-en átmenő kör. S mivel az $A_1A_2A_3$ háromszög Feuerbach-köre az $M_1M_2M_3$ középháromszög körülírt köre, elegendő megmutatnunk, hogy M_2 és M_3 is rajta van b_1 inverz képén, azaz

$$M_1X\cdot M_1M_2=M_1Y\cdot M_1M_3=M_1T_1^2,$$

ahol X, ill. Y az M_1M_2, ill. M_1M_3 félegyenesnek és a b_1-nek metszéspontjai (2. ábra). Mivel $A_2T_1=s-a_2=(a_1+a_3-a_2)/2$ és $M_1A_2=a_1/2$, azért

$$M_1T_1^2=(M_1A_2-A_2T_1)^2=\frac{(a_2-a_3)^2}{4}.$$

P az A_1-ből induló belső szögfelezőnek és a_1-nek a metszéspontja, tehát

$$PA_2=\frac{a_1a_3}{a_2+a_3},\quad PA_3=\frac{a_1a_2}{a_2+a_3},$$
$$PM_1=|M_1A_2-PA_2|=\frac{a_1|a_2-a_3|}{2(a_2+a_3)}.$$

1984-01-009-1.eps

2. ábra

Végül a PXM_1 és PQA_2 hasonló háromszögekből

$$M_1X:A_2Q=PM_1:PA_2=\frac{a_1|a_2-a_3|}{2(a_2+a_3)}\cdot\frac{a_2+a_3}{a_1a_3}=\frac{|a_2-a_3|}{2a_3},$$

vagyis

$$M_1X\cdot M_1M_2=\frac{|a_2-a_3|}{2a_3}\cdot A_2Q\cdot M_1M_2=\frac{(a_2-a_3)^2}{2a_3}\cdot\frac{a_3}{2}=M_1T_1^2.$$

A PYM_1 és PRA_3 hasonló háromszögekből pedig

$$M_1Y:A_3R=PM_1:PA_3=\frac{|a_2-a_3|}{2a_2},$$

vagyis

$$M_1Y\cdot M_1M_3=\frac{|a_2-a_3|}{2a_2}\cdot|a_2-a_3|\cdot\frac{a_2}{2}=M_1T_1^2.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk, s azt is, hogy ez a közös pont éppen a beírt kör és a Feuerbach-kör érintési pontja.