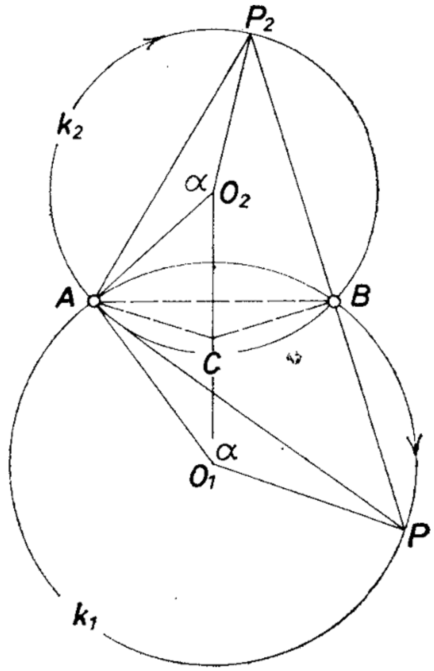
Jelöljük a k_1, ill. k_2 körök középpontját O_1-gyel, ill. O_2-vel, a két kör A-tól különböző metszéspontja legyen B. Először megmutatjuk, hogy a P_1, P_2, B pontok a mozgás bármely pillanatában egy egyenesen vannak.

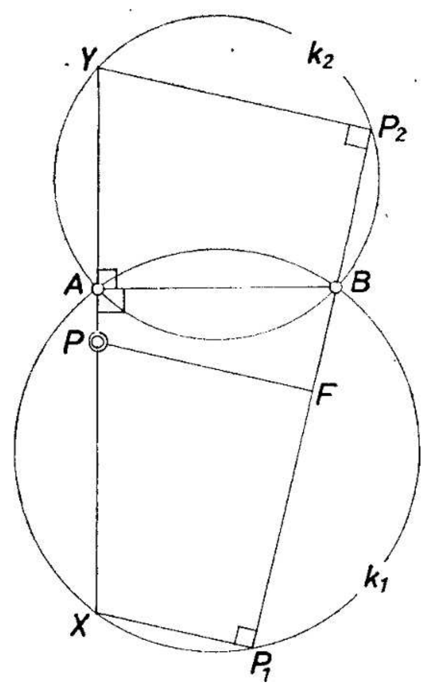
Ehhez figyeljük meg a következőket: ha az AB_1C_1,AB_2C_2 AB_3C_3,... hasonló, és egyező körüljárású háromszögeknél a B_1, B_2, B_3, ... pontok egy egyenesen vannak, akkor a C_1, C_2, C_3, ... pontok is egy egyenesen fekszenek. Ez egyszerűen következik abból, hogy a B_1, B_2, B_3, ... pontokat az A középpontú, B_1AC_1 szögű és AC/AB arányú forgatvanyújtás viszi át rendre a C_1, C_2, C_3, ... pontokba, és a forgatvanyújtás egyenestartó. Ez igaz abban az esetben is, ha a hasonló háromszögek helyett egy egyenesbe eső hasonló ponthármasokat mondunk.



1. ábra

A feladat feltétele szerint a P_1, P_2 pontok a körök középpontjai körül állandó szögsebességgel forognak. Tegyük fel, hogy pl. a kiindulási A helyzettől α szöggel fordultak el $(0 < \alpha < 2\pi)$ (1. ábra). Az AO_1P_1, AO_2P_2 egyező körüljárású, hasonló, egyenlő szárú (esetleg elfajult) háromszögek. Mivel az O_1O_2 egyenes az AB szakasz felező merőlegese, szerkeszthetünk rajta olyan C pontot, hogy az ACB és AO_1P_1 háromszögek hasonlóak és egyező körüljárásúak legyenek. Előző megjegyzésünk értelmében így a P_1, P_2, B pontok valóban egy egyenesen vannak, mivel O_1, O_2, C is egy egyenesen fekszenek.

Elegendő most már azt bizonyítanunk, hogy a P_1P_2 szakasz felező merőlegese – a P_1P_2 szakasz elhelyezkedésétől függetlenül – átmegy egy rögzített ponton. Messe az AB-re A-ban állított merőleges a k_1, ill. k_2 kört X-ben, ill. Y-ban, és legyen XY felezőpontja P (2. ábra).



2. ábra

A BX és BY szakaszok Thalész tétele szerint köreikben átmérők, ezért az $XP_1P_2\sphericalangle$ és $YP_2P_1\sphericalangle$ derékszög, az XP_1P_2Y négyszög tehát derékszögű trapéz (hurkolt is lehet, és derékszögű háromszöggé is fajulhat). Következésképpen a P_1P_2 szár felező merőlegese átmegy a rögzített XY szár P felezési pontján; ezzel állításunkat igazoltuk.