I. megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, ebből ellentmondásra fogunk jutni. Mivel $6\cdot 329 = 1974 < 1978$, azért valamelyik országból, A-ból legalább 330 tagnak kellett jönnie, legyenek sorszámaik

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{330}.$$

Tekintsük az $a_2 - a_1,\ a_3 - a_1,\ \ldots,\ a_{330} - a_1$, sorszámú tagokat. Ezek egyike sem lehet A-beli, hiszen akkor volna a feltételnek megfelelő három tag. Így mind a 329 tag a megmaradt 5 ország valamelyikéből jött, és mivel $5\cdot 65 = 325 < 329$, közülük egy országból, B-ből legalább 66-an jöttek, sorszámuk legyen

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_{66}.$$

Nézzük most a $b_2 - b_1,\ b_3 - b_1,\ \ldots,\ b_{66} - b_1$ sorszámú tagokat. Ezek egyike sem jöhetett a B országból, ám az A országból sem. Ugyanis ha a $b_i - b_j = (a_m - a_1) - (a_n - a_1) = a_m - a_n$ sorszámú tag A-beli lenne, ismét találnánk három, a feltételnek megfelelő tagot. Így a fenti 65 tag 4 országból jött, így valamelyik országból, C-ből legalább 17-en jöttek, sorszámuk

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_{17}.$$

Az előzőekhez hasonlóan a $c_2 - c_1,\ c_3 - c_1,\ \ldots,\ c_{17} - c_1$ sorszámú tagok csak három országból jöhettek, így a D országból legalább 6-an voltak:

$$d_1 < d_2 \ldots < d_6.$$

A $d_2 - d_1,\ d_3 - d_1,\ \ldots,\ d_6 - d_1|$ sorszámú tagok közül legalább 3 jött az E országból

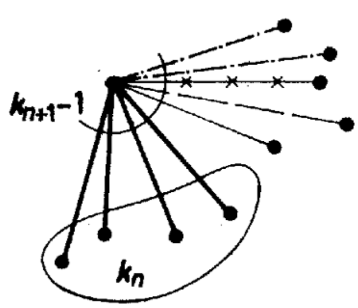
$$e_1 < e_2 < e_3,$$

végül az $f_1 = e_2 - e_1$, illetve $f_2 = e_3 - e_2$ sorszámú tagok csak a hatodik, F országból jöhettek. Ám ekkor az $f_2 - f_1$ sorszámú tag sehonnan sem jöhetett volna, ellentmondás, ami éppen az állítást bizonyítja.

II. megoldás. A következő állítást igazoljuk teljes indukcióval: ha egy legalább

$$k_n = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + 1$$

csúcsú teljes gráf éleit n színnel kiszínezzük, akkor biztosan lesz benne egyszínű háromszög (azaz három csúcs úgy, hogy köztük bármely él ugyanolyan színű).



Az állítás $n = 1$-re nyilván igaz, mivel $k_1 = 3$. Tekintsünk most egy k_{n+1} szögpontú gráfot és annak tetszőleges csúcsát. Ebből a csúcsból $k_{n+1} - 1$ él indul ki, minden él $(n+1)$ szín valamelyikével színezve. Mivel $(n+1)\cdot(k_n - 1) = k_{n+1} - 2 < k_{n+1} - 1$, azért biztosan van k_n egyszínű él is, mondjuk fekete (*l. ábra*). Tekintsük ezek végpontjait. Ha a végpontok között van fekete él, máris találtunk egyszínű (fekete) háromszöget. Ha nincs, akkor a k_n végpont közötti élek csak n különböző színnel vannak színezve, és ekkor az indukciós feltevésünk értelmében már itt lesz egyszínű háromszög.

Tekintsünk most egy 1978 csúcsú gráfot, melynek csúcsai 1-től 1978-ig vannak megszámozva. Az i és j csúcs közti élet hat különböző szín valamelyikével színezzük ki, attól függően, hogy az $|i - j|$ sorszámú tag melyik országból jött. Mivel $k_6 = 1958 < 1978$, azért van egyszínű háromszög, a csúcsok száma legyen $i < j < k$. Ekkor a $j - i,\ k - j$ és a $k - i$ sorszámú tagok ugyanabból az országból valók, és $(j - i) + (k - j) = (k - i)$, ahogyan azt kívántuk.

Megjegyzések. 1. Elképzelhető, hogy $j - i = k - j$. Ekkor nem három, hanem csak két tag sorszámát kapjuk, de az egyik sorszám éppen kétszer akkora, mint a másik.

2. A második megoldásból az is kiolvasható, hogy n ország esetén ha a társaságnak legalább k_n tagja van, létezik a kérdezett tulajdonságú tag. Igazolható, hogy ha $g(n)$-nel jelöljük a legkisebb olyan tagszámot, amelyre ilyen tulajdonságú társaság létezik, akkor

$$\frac{3^n + 1}{2} \le g(n) \le n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{1!}\right) + 1.$$

Azt is tudjuk, hogy $g(1) = 3,\ g(2) = 5,\ g(3) = 14$. $g(4)$ pontos értéke nem ismeretes.