Először megmutatjuk, hogy ha van olyan $n \geq i > j$ számpár, amelyekre $a_i < a_j$, akkor az egyenlőtlenség bal oldalát csökkenthetjük azzal, hogy a_i-t és a_j-t felcseréljük. Ugyanis a változás

$$\left(\frac{a_j}{i^2}+\frac{a_i}{j^2}\right)-\left(\frac{a_1}{i^2}+\frac{a_j}{j^2}\right)=(a_j-a_i)\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{j^2}\right)<0.$$

Mivel az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ számokat csak véges sokféleképpen permutálhatjuk, a cseréket elég sokszor elvégezve a számaink már monoton nőnek, s közben a bal oldal értéke minden esetre nem nőtt. S mivel ekkor már $a_1{\geq}1,\ a_2{\geq}2,\ \ldots,\ a_n{\geq}n$, kapjuk, hogy az legalább

$$\frac{1}{1^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{n^2}=\sum_{k-1}^{n}\frac{1}{k},$$

amit bizonyítani kellett.

Megjegyzés. Ugyanezzel a gondolatmenettel látható be a következő állítás is: ha

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \qquad \text{és} \qquad y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$$

tetszőleges számsorozatok, $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n$ pedig az $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ számok tetszőleges permutációja, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+1-k} \leq \sum_{k=1}^{n} x_k y_{i_k} \leq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$