I. megoldás. Tekintsük az 1 és $g(n)$ közti egész számokat. Ezek mindegyike vagy f-nek vagy g-nek valamilyen helyen felvett értékeként adódik ki. Mégpedig g értékeként n szám, $g(1),\ g(2),\ \dots,\ g(n)$; a $g(n)-1=f\big(f(n)\big)$ alapján f értékeként $f(n)$ szám, $f(1),\ f(2),\ \dots,\ f(n)$. Ezzel minden 1 és $g(n)$ közti számot pontosan egyszer kapunk meg, tehát

$$g(n)=f(n)+n \tag{*}$$

Ebből adódik, hogy $f(1)=1$ (hiszen vagy $f(1)$-nek vagy $g(1)$-nek kell 1-nek lennie és $g(1)=f(1)+1>1$), innen $g(1)=2$. Hasonlóan $f(2)=3$ (hiszen $g(2)=f(2)+2>f(1)+2=3$). Ezek után elkezdhetjük kitölteni az alábbi táblázatot. Minden természetes számnak pontosan egyszer kell benne szerepelnie. Így ha a táblázatot valameddig már kitöltöttük, a következő oszlop „f sorába” a legkisebb, eddig még nem szereplő számnak, „g sorába” pedig a (*) képlet szerinti számnak kell kerülnie.

–	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	234	235	236	237	238	239	240
f	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	...	378	380	381	383	385	386	388
g	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	...	612	615	617	620	623	625	628

A táblázatból leolvasható a végeredmény: $f(240)=388$.

II. megoldás. A (*) összefüggés alapján

$$f\big(f(n)\big)=f(n)+n-1. \tag{**}$$

Ebből $f(3)=f\big(f(2)\big)=f(2)+2-1=4$, $f(4)=4+3-1=6$, $f(6)=9$, $f(9)=14$, $f(14)=22$, $f(22)=35$, $f(35)=56$, $f(56)=90$, és így $g(35)=56+35=91$. Mivel minden $g(n)$ érték valamilyen $f(k)$ érték rákövetkezője, azért nem lehet $g(36)$ értéke 92, következésképpen $f(57)=92$. Innen $f(92)=92+56=148$, $f(148)=239$, $f(239)=386$. Másrészt $g(148)=239+148=387$, ezért az előbbi okoskodás alapján $f(240)=388$.

III. megoldás. Legyen $a_0=1$, és $a_{n+1}+1=f(a_n+1)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$. Ekkor $a_1=2$ és a (**) képlet szerint

$$a_{n+2}+1=f(a_{n+1}+1)=f\big(f(a_n+1)\big)=a_{n+1}+1+a_n$$

azaz az $\{a_n\}$ sorozat éppen a Fibonacci-sorozat. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$f(a_n+x)=a_{n+1}+f(x)\qquad 1\le x\le a_{n-1}\qquad \text{esetén.} \tag{***}$$

Ehhez előbb megjegyezzük, hogy $f(y)$ értéke y-nál annyival több, ahány „g” van 1 és $f(y)$ között. Ennek értéke viszont megegyezik a maximális olyan m-mel, amelyre $g(m)=f\big(f(m)\big)+1\le f(y)$, ami pontosan akkor áll, ha $f(m)<y$. Így

$$f(a_n+x)=a_n+x+m,$$

ahol m a legnagyobb olyan szám, amelyre $f(m)<a_n+x$.

Mivel $f(a_{n-1}+1)=a_n+1\le a_n+x$ és $f(a_{n+1}+1)=a_{n+2}+1>a_n+x$, azért $a_{n-1}<m\le a_{n+1}$ és így alkalmazhatjuk az indukciós feltevést:

$$f(m)=f(a_{n-1}+m-a_{n-1})=a_{n+1}(m-a_{n-1}),$$

azaz m a legnagyobb olyan szám, amelyre $f(m-a_{n-1})<x$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy $f(x)=x+(m-a_{n-1})$, vagyis

$$f(a_n+x)=a_n+x+m=a_n+a_{n-1}+f(x),$$

ahogyan azt állítottuk.

A teljes indukció befejezéséhez még $(***)$-ot például $a=1$-re ellenőrizni kell: $f(a_1+1)=a_1+f(1)$, s ez valóban teljesül.

Végül minden 1-nél nagyobb pozitív szám egyértelműen írható fel $1+a_{i_1}+a_{i_2}+\dots$ alakban, ahol $i_j\le i_{j+1}+2$, $i_j\ge 0$. Ekkor $(***)$ alapján

$$f(1+a_{l_1}+a_{l_2}+\dots)=1+a_{i_1+1}+a_{i_2+1}+\dots,$$

ami ismét indukcióval igazolható. Esetünkben a Fibonacci-sorozat 240-nél kisebb tagjai: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, továbbá $240=1+1+5+233$, és így $f(1+1+5+233)=1+2+8+377=388$.

Megjegyzés. A megoldásokban feltételeztük, hogy létezik a feltételeket kielégítő f és g függvény. Annyit bizonyítottunk, hogy ha létezik, akkor $f(240)=388$ lehet csak. A megoldásokból az is kiderült, hogy legfeljebb egy ilyen f és q függvény létezhet.

IV. megoldás. Legyen $\alpha=(\sqrt{5}+1)/2$, $f(n)=[n\alpha]$ és $g(n)=[n\alpha^2]$. Állítjuk, hogy f és g eleget tesz a feladat összes feltételének. Így (feltéve, hogy f és g egyértelműen meghatározott) $f(240)=[240\alpha]=[120\sqrt{5}+120]=388$.

Először is világos, hogy f és g szigorúan monoton növekszik, hiszen $\alpha>1$ és $\alpha^2>1$. Másrészt $1/\alpha+1/\alpha^2=1$, α és α^2 irracionális, és így f és g értékkészlete minden egész számot pontosan egyszer ad ki (lásd Skljarszkij–Csencov–Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, 1. kötet, 108. feladat). Így csak a

$$g(n)=f\big(f(n)\big)+1$$

összefüggést kell igazolnunk. De $g(n)\neq f\big(n)\big)$, hiszen f és g értékkészletének nincs közös eleme. Másrészt $[\alpha n]<\alpha n$, azaz

$$\begin{gathered}\big[[\alpha n]\alpha\big]\le[\alpha^2 n]\\ f\big(f(n)\big)\le g(n)\end{gathered}$$

$\alpha>1$ és $1=\alpha^2-\alpha$ alapján az $\alpha n<\alpha+[\alpha n]=\alpha+(\alpha^2-\alpha)[\alpha n]$ egyenlőtlenséget α-val osztva és átrendezve

$$n+[\alpha n]<\alpha[\alpha n]+1,$$

amiből

$$\begin{gathered}g(n)=[\alpha^2 n]=[(1+\alpha)n]=\\ =n+[\alpha n]\le\big[\alpha[\alpha n]+1\big]=f\big(f(n)\big)+1.\end{gathered}$$