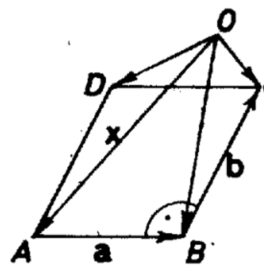
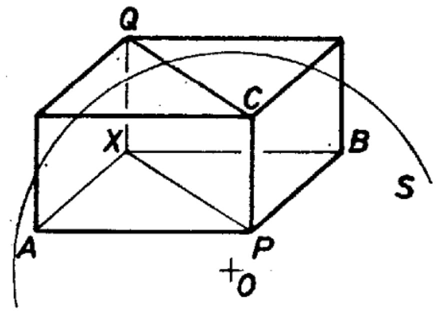
Először egy könnyen igazolható segédtételt mondunk ki: minden $ABCD$ téglalapra és minden (nem feltétlenül a téglalap síkjában lévő) O pontra $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$. Legyen ugyanis $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$, $\overrightarrow{OA} = x$ (a*1. ábra*), ekkor $ab = 0$, hiszen a és b merőlegesek. A bizonyítandó állítás pedig az

$$\mathbf{x}^2 + (\mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{a})^2 + (\mathbf{x} + \mathbf{b})^2$$

azonosság átírása.



1. ábra



2. ábra

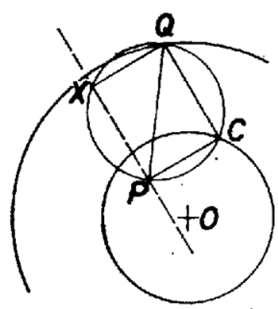
Térjünk rá a feladatra. Legyen az adott S gömb középpontja O, sugara r, az $APBX$ téglalap negyedik csúcsa X (*2. ábra*). A segédtételt az $APBX$, valamint $PXQC$ téglalapokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$OP^2 + OX^2 = OA^2 + OB^2, \qquad OP^2 + OQ^2 = OX^2 + OC^2,$$

ahonnan

$$OQ^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - 2OP^2 = 3r^2 - 2OP^2 = \text{állandó},$$

azaz a Q pont rajta van az O középpontú, $r_1 = \sqrt{3r^2 - 2OP^2} > r$ sugarú S_1 gömbön.



3. ábra

Megmutatjuk, hogy az S_1 gömb minden Q pontja hozzátartozik a mértani helyhez. Tekintsük ugyanis az S gömb és a PQ átmérőjű gömb metszésvonalát. Ennek az OPQ síkba eső egyik pontja legyen C és QCP-t téglalappá kiegészítő negyedik pont X (*3. ábra*). A segédtétel szerint $OX^2 = OQ^2 + OP^2 - OC^2 = 2r^2 - OP^2 > r^2$, azaz az X pont kívül van az S gömbön. Így az XP átmérőjű gömbnek valamint az S gömbnek a P-ben CP-re emelt merőleges síkban van két közös pontja: az egyik legyen B, az XBP-t téglalappá kiegészítő negyedik csúcs A. Az AP, BP, CP szakaszok páronként merőlegesek, az általuk meghatározott tégla negyedik csúcsa Q, továbbá B és C az S gömbön van. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy A is S-en van. Ez viszont az

$$OA^2 = OX^2 + OP^2 - OB^2 = (2r^2 - OP^2) + OP^2 - OB^2 = r^2$$

összefüggésből következik.

Megjegyzés. Ha nem azt követeljük meg, hogy A, B és C egy gömb felszínén legyenek, hanem hogy rendre három egymással koncentrikus gömb felszínén, a mértani hely továbbra is egy gömb felülete. A feladat tetszőleges dimenziójú gömbökre, például síkra is általánosítható.