A feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha

$$1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1) \tag{*}$$

osztható 1000-rel, azaz ha osztható külön-külön 8-cal és 125-tel is. Az $n > m$ feltétel miatt (*) jobb oldalán a második tényező páratlan, és így 8-cal akkor és csak akkor osztható, ha $m \geq 3$.

A 125-tel való oszthatósághoz vizsgáljuk először 1978^a utolsó jegyét $a = 1,\ 2,\ \ldots$ értékekre. Ezek rendre $8,\ 4,\ 2,\ 6,\ 8,\ 4,\ 2,\ 6,\ \ldots$ azaz négyes periódust alkotnak. Így $1978^a - 1$ akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha a osztható 4-gyel. Az $1978^{4b} = \ldots 256^b$ utolsó két számjegye ötös periódust alkot: $56,\ 36,\ 16,\ 96,\ 76,\ 56,\ 36,\ \ldots$ tehát $1978^{4b} - 1$ pontosan akkor osztható 25-tel, ha b többszöröse 5-nek. Végül $1978^{20c} = \ldots 256^{5c} = \ldots 776^c$ utolsó három jegyét vizsgálva először $c = 5$ esetén kapunk 125-tel osztható végződést.

Ez azt jelenti, hogy ha $1978^{n-m} - 1$ osztható 125-tel, akkor $n - m$ értékének legalább 100-nak kell lennie. Ezt az előző $m \geq 3$ feltétellel összevetve azonnal látható, hogy a keresett értékek $m = 3$ és $n = 103$.

Megjegyzés. A feladat megoldásához felhasználhatjuk az ún. Euler-tételt: ha a és k relatív prímek, és $\varphi(k)$-val jelöljük a k-nál kisebb, k-hoz relatív prím egészek számát, akkor $a^{\varphi(k)} - 1$ osztható k-val. (Lásd például Molnár Emil: Matematikai versenyfeladatok, 488. oldal.) Mivel $\varphi(125) = 100$ és 1978 és 125 relatív prímek, azért $1978^{100} - 1$ osztható 125-tel. Ez azonban nem jelenti azt, hogy 100 a *legkisebb* ilyen kitevő, noha a feladat éppen a legkisebbet kérdezte.