Ha $n=1$, (2) a

$$2(u+v+w)+a_1(u+v+w)=0$$

azonosságot jelenti, amiből például $u=v=w=1$ mellett $a_1=-2$ következik, vagyis $P(x,\ y)=x-2y$. A továbbiakban feltesszük, hogy $n>1$.

Legyen $a$ tetszőleges valós szám, és helyettesítsük (2)-be az $u=a,\ v=a,\ w=1-2a$ értékeket:

$$P(2a,\ 1-2a)+2P(1-a,\ a)=0.$$

Eszerint a

(3) $$Q(z)=P(1-z,\ z)=b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_1z+b_0$$

polinomra

$$Q(1-2a)+2Q(a)=0$$

teljesül tetszőleges $a$ mellett, vagyis az

$$R(z)=Q(1-2z)+2Q(z)$$

polinom értéke minden $z=a$ mellett 0. Ez csak úgy lehet, ha az $R(z)$ polinom minden együtthatója 0-val egyenlő. Ha $Q$-ban a legmagasabb fokú, 0-tól különböző együtthatójú tag $b_kz^k$ $(0\leqq k\leqq n)$, akkor $R$-ben a legmagasabb fokú tag $\left[(-2)^k+2\right]b_kz^k$, ami csak $k=1$ mellett egyenlő 0-val. Ekkor $Q(z)=b_1z+b_0$, és $R(z)=b_1+3b_0$, tehát $b_1=-3b_0$, és

(4) $$Q(z)=b_0(1-3z).$$

(1) szerint tetszőleges olyan $(a,\ b)$ számpárra, amelyre $a+b\neq 0$

$$P(a,\ b)=(a+b)^nP\left(\frac{a}{a+b},\ \frac{b}{a+b}\right),$$

amiből (3) és (4) alapján

(5) $$P(a,\ b)=(a+b)^n\,Q\left(\frac{b}{a+b}\right)=(a+b)^nb_0\left(1-\frac{3b}{a+b}\right)=b_0(a+b)^{n-1}(a-2b)$$

következik. Ha $b=-a\neq 0$, helyettesítsük (2)-be az

$$u=\frac{a}{2},\qquad v=\frac{a}{2},\qquad w=-a$$

értékeket, így azt kapjuk, hogy

$$P(a,\ -a)+2P\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)=0.$$

Itt ismét (1) alapján $P(a,\ -a)=a^nP(1,\ -1)$, $P(-a/2,a/2)=(-a/2)^n\cdot P(1,\ -1)$, tehát

$$\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]a^nP(1,\ -1)=0,$$

amiből $n>1,\ a\neq 0$ miatt $P(1,\ -1)=0$ következik. Tehát (5) olyan $(a,\ b)$ számpárra is igaz, melyben $b=-a\neq 0$, és nyilvánvalóan igaz (5) az $a=b=0$ számpárra is. Ezzel beláttuk, hogy (2) csak olyan $P(x,\ y)$ polinomra teljesülhet, amelyre teljesül (5). Ennek megfordítása behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető: ha a $P(x,\ y)$ polinomra teljesül (5), akkor nyilván teljesül rá (2) is. (5) szerint $P(1,\ 0)=b_0$, így $P(1,\ 0)=1$ miatt a keresett polinom

$$P(x,\ y)=(x+y)^{n-1}(x-2y).$$

Ebből binomiális tétellel már könnyen megkaphatjuk $P$ együtthatóit: $a_k=\binom{n-1}{k}-2\binom{n-1}{k-1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, a bevezetőben külön tárgyalt $n=1$ esetre is érvényes.

*Megjegyzés.* A megoldás elején felhasználtuk, hogy az $P(z)$ polinom értéke csak akkor lehet minden $z=a$ mellett 0, ha a polinom minden együtthatója 0. Ez a polinomok gyöktényezős alakja miatt van így: ha a $p(x)$ polinomnak $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ gyöke, akkor van olyan $q(x)$ polinom, hogy

$$p(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_k)q(x),$$

ami viszont abból következik, hogy $p(x)-p(a)$ tetszőleges $a$ mellett osztható $(x-a)$val. Így egy $n$-edfokú polinomnak legfeljebb $n$ gyöke lehet, tehát ha egy legfeljebb $n$-edfokú polinomnak $n+1$ különböző helyen 0 az értéke, a polinom minden együtthatója 0.

Ennek az állításnak a kétváltozós megfelelőjét használtuk fel a megoldás végén, amikor abból, hogy (5) minden $(a,\ b)$ mellett igaz, arra következtettünk, hogy (5) megadja a keresett polinom alakját. Általában, ha a $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ polinomok értéke minden $(a,\ b)$ mellett egyenlő, akkor tetszőleges $b$ mellett a $P(x,\ b)$, $Q(x,\ b)$ polinomokra alkalmazhatjuk a fenti állítást, és mivel a polinomok együtthatói egy-egy újabb polinom $b$ helyen felvett értékei, kapjuk, hogy $P$ és $Q$ együtthatói is egyenlőek.