Ha $[P(k)]^2 = 1$, akkor $P(k)$ értéke vagy $+1$ vagy -1. Jelöljük p-vel azoknak a különböző k egészeknek a számát, amelyekre $P(k) = +1$, és legyen m a $P(k) = -1$ egyenlet különböző egész megoldásainak a száma. Mivel az n-edfokú

$$Q(x) = P(x) - 1, \quad R(x) = P(x) + 1$$

polinomoknak külön-külön legfeljebb n különböző gyökük lehet, p és m legfeljebb n, úgy $p + m \leq 2n$. Ha tehát $n \leq 2$, a feladat állítása nyilvánvaló, így a továbbiakban feltesszük, hogy $n \geq 3$. Feladatunk állításán túlmenően ebben az esetben belátjuk, hogy ha $pm > 0$, akkor $p + m \leq 4$, amiből következik, hogy $n = 3$ mellett $p + m$ maximális értéke $(n + 1)$, különben $p + m \leq n$.

Feltehetjük, hogy $p \leq m$, hiszen ha ez nem volna így, $P(x)$-et (-1)-gyel megszorozva p és m szerepe felcserélődik. Azt fogjuk belátni, hogy ha $m \geq 3$, és $p > 0$, akkor $m = 3$ és $p = 1$, amiből már következik az előbb mondott állítás. Jelöljük az $R(x)$ polinom egész gyökeit x_1-gyel, x_2-vel, ..., x_m-mel, $Q(x)$ egyik egész gyökét x_0-lal. Ekkor $R(x)$ osztható az $R_1(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)$ polinommal:

$$R(x) = R_1(x) \cdot R_2(x),$$

és mivel $R_1(x)$ főegyütthatója 1, és az $R(x)$, $R_1(x)$ polinomok egész együtthatósak, azért $R_2(x)$ is egész együtthatós. Emiatt $R_2(x_0)$ egész, és

$$R(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_m) \cdot R_2(x_0) = Q(x_0) + 2 = 2$$

miatt az

$$x_0 - x_1,\ x_0 - x_2, \ldots,\ x_0 - x_m$$

különbségek abszolút értéke csak 1 vagy 2 lehet, de 2 abszolút értéke legfeljebb csak 1 lehet közöttük. Így az x_0, x_1, x_2, ..., x_m számok között a legnagyobb és legkisebb különbsége legfeljebb 3, amiből következik, hogy a számuk legfeljebb 4, vagyis $m \leq 3$. Ha $m = 3$, akkor x_0-ra csak egyetlen érték jöhet szóba, tehát $p = 1$, állításainkat ezzel beláttuk.

Megjegyzés. Megoldásunk szerint $n = 1$, 2, 3 mellett $p + m$ maximális értéke rendre 2, 4, 4, különben $p + m \leq n$. Ezeket az értékeket rendre el is lehet érni, például a

$$\begin{aligned}
&P_1(x) = x, && x = \pm 1;\\
&P_2(x) = x(x-3) + 1, && x = 0, 1, 2, 3;\\
&P_3(x) = x(x-2)(x-3) - 1, && x = 0, 1, 2, 3;\\
&P_n(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n) + 1, && x = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}$$

polinomokkal.