(1) $$\sin\alpha \sin\beta \le \sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

I. megoldás. Tegyük föl, hogy az AB szakaszon létezik a kérdéses D pont, és jelöljük a CD egyenesnek a háromszög köré írt k körrel való második metszéspontját E-vel. Ekkor a föltevés szerint

(2) $$AD\cdot DB = DC^2.$$

Másrészt az ADC és EDB háromszögek hasonlók, mert D a k belsejében van, ezért E ugyanazon oldalán van a BC húrnak, mint A, tehát a két háromszögben a felsorolás szerinti első két–két csúcsnál levő szögek páronként egyenlők. Így

(3) $$\frac{AD}{DC}=\frac{ED}{DB},\qquad \text{azaz}\qquad AD\cdot DB = DC\cdot ED.$$

A (2) és (3) egyenlőségekben 3–3 tényező egyezik, így a negyedik tényezők is, ezért

$$ED = DC,$$

vagyis E a C csúcs tükörképe D-re. Eszerint E a k-nak olyan pontja, mely AB-től akkora távolságban van, mint C; tehát E és vele D létezésének szükséges föltétele, hogy a C-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesnek AB-re való e tükörképe messe k-t.

Ez a föltétel elegendő is, mert ha E közös pontja az e-nek és a k-nak, akkor a CE egyenes metszi AB-t, ezen D metszéspontra $DE = DC$, és így a (2) szerint D megfelel és A és B közé esik.

Legyen a C-t nem tartalmazó AB ívnek AB-től legtávolabbi pontja – vagyis a felező pontja – F, továbbá C és F vetülete AB-re C', F', ekkor a talált feltétel így írható:

(4) $$CC' \leqq FF'.$$

Válasszuk hosszegységnek körünk $2r$ átmérőjét, ekkor a szögek felhasználásával, és mivel CF felezi γ-t:

$$CC' = CB\sin\beta = (2r\sin\alpha)\sin\beta = \sin\alpha\sin\beta,$$
$$FF' = FB\sin\frac{\gamma}{2} = \left(2r\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} = \sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

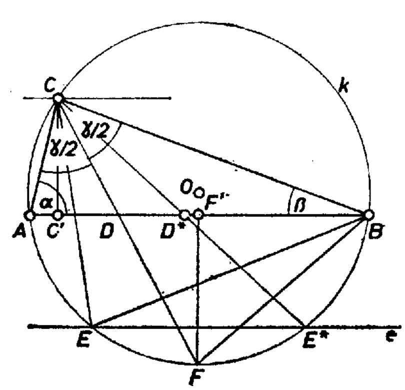
Ezeket (4)-be helyettesítve a feltételünkkel ekvivalens (1)-et kapjuk.

Soukup Lajos (Budapest, I. László Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Tompaszögű háromszögben – amennyiben a tompaszög C-nél van – (4) eleve teljesül, hiszen $CC' < r < FF'$. Ebből a bizonyított állításnál érdekesebb eredményt kapunk: ha $\gamma > 90^\circ$ akkor $\sin\alpha\sin\beta < \sin^2\gamma/2$

II. megoldás. Jelöljük a DCA, DCB szöget rendre γ_1 gyel, γ_2-vel, ekkor a sinustétel alapján

$$AD = CD\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha},\qquad BD = CD\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta}.$$



Ezeket az $AD\cdot BD = CD^2$ követelménybe helyettesítve

$$AD\cdot BD = CD^2\,\frac{\sin\gamma_1\sin\gamma_2}{\sin\alpha\sin\beta} = CD^2,$$

vagyis az ezt kielégítő D pont mellett a szögekre teljesül, hogy

(5) $$\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 = \sin\alpha \sin\beta \quad \text{és} \quad \gamma_1+\gamma_2=\gamma.$$

Mármost

$$\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos(\gamma_1+\gamma_2)\right] \leqq \frac{1}{2}[1-\cos\gamma] = \sin^2\frac{\gamma}{2},$$

ezt (5)-tel egybevetve (1)-et kapjuk.

Ezzel beláttuk, hogy ha a mondott tulajdonságú D pont létezik, akkor teljesül (1). Tegyük most fel, hogy a háromszög szögeire teljesül (1). Ekkor van olyan δ szög, amelyre $0 \leqq \delta \leqq \pi$, és

$$\cos\delta = 2\sin\alpha \sin\beta + \cos\gamma,$$

hiszen itt a jobb oldal értéke mindig legalább -1, és (1) teljesülése esetén

$$2\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma \leqq 2\sin^2\frac{\gamma}{2} + \cos\gamma = 1.$$

Mivel erre a δ szögre $\cos\delta > \cos\gamma$, és így $\delta < \gamma$, azért a

$$\gamma_1 = \frac{\gamma-\delta}{2}, \qquad \gamma_2 = \frac{\gamma+\delta}{2}$$

szögek pozitívak, és rájuk teljesül (5). A fenti gondolatmenet megfordításával viszont ebből azt kapjuk, hogy a γ_1, γ_2 szögekhez tartozó D pontra CD az AD, BD szakaszok mértani közepe, (1) tehát valóban elégséges feltétele az ilyen D pont létezésének.

Krausz Tamás (Debrecen, Fazekas M: Gimn., IV. o. t.)