(1) $$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0.$$

I. megoldás. Ha $a=a_0$ és $b=b_0$ olyan valós számok, amelyekre (1)-nek van egy x_0 valós gyöke, akkor $a=-a_0$, $b=b_0$ számok is olyanok, hiszen ekkor (1)-nek $-x_0$ is gyöke lesz. Mivel a vizsgálandó a^2+b^2 kifejezés értéke e két számpárra ugyanaz, feltehetjük, hogy

(2) $$a \geqq 0.$$

(1) bal oldalának értéke $x=0$ mellett nem 0, tehát (1) gyökei 0-tól különbözőek, és gyökei az (1)-gyel ekvivalens

(3) $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2=0$$

egyenletnek is. Ennek viszont akkor és csakis akkor van valós gyöke, ha az

(4) $$y^2+ay+b-2=0$$

(5) $$x+\frac{1}{x}=y$$

egyenletekből álló rendszernek van valós gyöke.

Rögzített y mellett (5) x-re másodfokú egyenlet, amelynek akkor és csakis akkor van valós gyöke, ha $|y| \geqq 2$. Emiatt (3)-nak akkor és csakis akkor van valós gyöke, ha (4)-nek van 2-nél nem kisebb abszolút értékű valós gyöke.

(4) gyökeinek számtani közepe $-\dfrac{a}{2}<0$, tehát közülük a nagyobb abszolút értékű a kisebbik. Eszerint a keresett feltétel

$$\frac{-a-\sqrt{a^2-4b+8}}{2} \leqq -2,$$

ami ekvivalens a

$$4-a \leqq \sqrt{a^2-4b+8}$$

feltétellel. Ha $a \geqq 4$, akkor ez nyilván teljesül (feltéve, hogy a jobb oldali gyöknek van értelme), mert a bal oldalon nem pozitív, a jobb oldalon nem negatív szám áll. Az $a \geqq 4$ eset azonban a minimumhely keresése szempontjából kizárható, mert ekkor $a^2+b^2 \geqq a^2 \geqq 16$, és például $a=2$, $b=2$ esetén $x=-1$ megoldása (1)-nek, és ekkor $a^2+b^2=4+4=8<16$. Feltehetjük tehát, hogy $a<4$, ekkor $4-a>0$, és így most feltételünk ekvivalens a

(6) $$(4-a)^2 \leqq a^2-4b+8$$

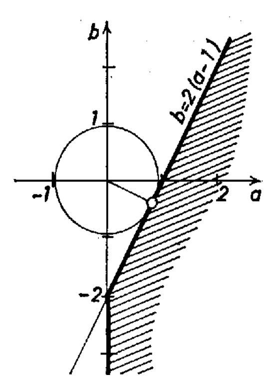
feltétellel. (Ebből az alakból látható, hogy feltételünk azt is biztosítja, hogy (3)-nak legyen valós gyöke.) (6)-ból a

(7) $$b \leqq 2(a-1)$$

feltételt kapjuk. Azt kell tehát meghatároznunk, hogy a (2) és (7) egyenlőtlenségeknek eleget tevő (a,b) számpárok közül a^2+b^2 értéke melyikre minimális. Egyenlőtlenségeink az (a,b) koordináta-rendszerben egy-egy félsíkot határoznak meg, (a^2+b^2) pedig az (a,b) pontra nézve az origótól mért távolságnak a négyzete. Tehát a (2)–(7) tartománynak az origóhoz legközelebbi pontját keressük: ez az origónak a

$$b=2(a-1)$$

egyenesen levő vetülete. A vetület koordinátái $a=\dfrac{4}{5}$, $b=-\dfrac{2}{5}$, tehát a^2+b^2 minimuma $\dfrac{4}{5}$.



Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Az I. megoldásban láttuk, hogy azokat az (a,b) számpárokat kell vizsgálnunk, amelyekre (4)-nek van 2-nél nem kisebb abszolút értékű valós gyöke. Jelöljük ezt a gyököt u-val: $|u| \geqq 2$, és jelöljük (4) másik valós gyökét v-vel. A gyökök és együtthatók összefüggése szerint

$$a=-u-v, \quad b-2=uv,$$

tehát

$$a^2+b^2=(u+v)^2+(uv+2)^2=(u^2+1)\left(v+\frac{3u}{u^2+1}\right)^2+u^2+4-\frac{9u^2}{(u^2+1)}.$$

Rögzített u mellett ez akkor minimális, ha az első tag 0, ekkor

$$a^2+b^2=(u^2+1)+\frac{9}{u^2+1}-6.$$

Ennek keressük a minimumát az $u^2 \geqq 4$ feltétel mellett. Megmutatjuk, hogy az

$$f(t)=t+\frac{9}{t}-6$$

függvény monoton nő a $t \geqq 5$ szakaszon. Emiatt $f(t)$ a minimumát $t=5$ mellett veszi fel, és az $f(5)=\dfrac{4}{5}$ érték egyben a^2+b^2 minimuma is a vizsgált feltétel mellett. Az $f(t)$ függvény deriváltja

$$f'(t)=1-\frac{9}{t^2}$$

valóban pozitív $t \geqq 5$ mellett. Feladatunk megoldását ezzel befejeztük.