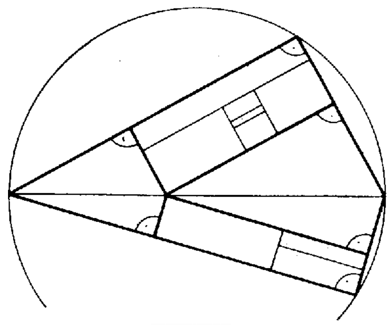
I. megoldás. Egy konvex négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két szembenfekvő szögének összege 180°. Legegyszerűbbnek tekinthetjük a négy derékszöggel bíró téglalap esetét, erre ugyanis már $n = 2$ mellett helyes az állítás, mert bármelyik szemben levő oldalpárjával párhuzamos vágással két téglalapra vágható, és a kettévágás akárhányszor, bármelyik résztéglalapon megismételhető. – Erre tekintettel elég bizonyítanunk a következő állítást: *minden konvex négyszög szétvágható* 4 *darab húrnégyszögre úgy, hogy a részek közül legalább az egyik téglalap.*

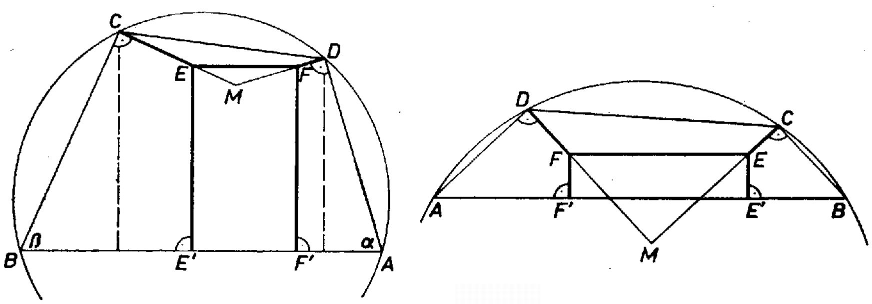
Ha a négyszögnek van derékszöge, de nem mindegyik szöge derékszög, akkor természetesen két szemben levő csúcsánál vannak a derékszögek, és a további két szög csúcsát összekötő átló Thalész tétele alapján a körülírt körnek átmérője és a négyszög belsejében halad (1. ábra).



1. ábra

Véve ennek bármely belső pontját, és merőleges szakaszt bocsátva belőle mind a négy oldalra, az adódó talppont mind a négy esetben belső pontja az illető oldalszakasznak. E szakaszok mentén szétvágva a négyszöget, tüstént látjuk, hogy két téglalap és két, a kiindulásihoz hasonló négyszög keletkezett, az állítás tehát helyes.

Ha pedig a négyszögnek egyik szöge sem derékszög, akkor van tompaszöge, és az ezzel szomszédos szögek egyike szintén tompaszög. Válasszuk úgy a betűzést, hogy a hegyesszögek csúcsai A és B, a tompaszögek csúcsai C és D. Állítsunk merőleges félegyenest C-ben a CB, és D-ben a DA oldalra, a négyszöget tartalmazó partjukon. Ezek a félegyenesek a CD szakasszal hegyesszöget zárnak be: $\gamma - 90°$-ot, illetve $\delta - 90°$-ot, ezért metszik egymást egy M pontban. Vegyünk továbbá AB-vel párhuzamosan egy olyan egyenest, amely elválasztja a C, D pontpárt az A, B, M ponthármastól (2. ábra), és jelöljük az MC, MD szakaszon levő pontját E-vel, F-fel, továbbá ezek vetületét az AB egyenesen rendre E'-vel, F'-vel.



2. ábra

Megmutatjuk, hogy a CE, EF, FD, EE' és FF' szakaszok menti szétvágás megfelel célunknak.

Ugyanis $\beta < 90°$ miatt a CM félegyenes metszi a BA félegyenest, ezért M a C-ből AB-re bocsátott merőlegesnek, C „magasságvonalának” B-t nem tartalmazó, az AD-t tartalmazó partján van; hasonlóan $\alpha < 90°$ miatt M a D magasságvonalának az A-t nem tartalmazó, B-t és C-t tartalmazó partján van. Ezek szerint M e két magasságvonal közti sávban van, és itt van E, F is mint az MC, illetve MD szakasz pontja, továbbá E', F' is. Másrészt E, F az eredeti négyszögben is benne vannak, AB-nek a C-t és D-t tartalmazó partján.

A szétdarabolás részei húrnégyszögek: $EFF'E'$ téglalap, $AF'FD$-ben és $BE'EC$-ben két–két szemben levő csúcsnál derékszög van, végül a $CEFD$ négyszögben

$$DCE\sphericalangle + EFD\sphericalangle = (\gamma - 90°) + \{360° - 90° - (180° - \alpha)\} = \gamma + \alpha = 180°.$$

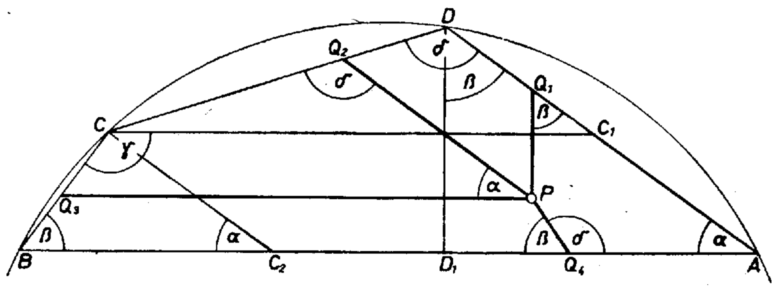
Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

II. megoldás. A feladat állítása ugyancsak már $n \geqq 2$ mellett érvényes akkor is, ha a kiindulási húrnégyszög szimmetrikus trapéz, mert ezt bármely az alapjaival párhuzamos szelője két szimmetrikus trapézra osztja. (Tulajdonképpen a szimmetrikus trapéznak speciális esete az I. megoldásban lényeges szerepet játszott téglalap.) Ennek alapján elég azt bizonyítanunk, hogy minden olyan $ABCD$ konvex négyszög, melynek egymás utáni szögei α, β, γ és δ, és ezekre

$\alpha + \gamma = 180°$ (tehát egyszersmind $\beta + \delta = 180°$ is), szétvágható két szimmetrikus trapézra és két olyan négyszögre, melyeknek egymás utáni szögei α, β, γ, δ. Egyszerűség kedvéért és az I. megoldásra is tekintettel kizárjuk a következő eseteket: α, β, γ, δ közt van derékszög, továbbá $\alpha = \beta$ és $\alpha = \delta$; így föltehetjük, hogy

$$\alpha < \beta < 90° < \delta < \gamma. \tag{1}$$

Olyan pontot keresünk, ahonnan a keresett 4 vágás kiindulhat. Az egyik szimmetrikus trapéz egyik hegyesszögét B-ben kívánjuk úgy, hogy hosszabb alapja a BA oldal része legyen, szára a BC-nek része; a másik trapéz rövid alapja pedig a DA-nak, egyik szára a DC-nek legyen része. Mivel (1) szerint $\gamma + \beta > 180°$ és $\gamma + \delta > 180°$, azért van az AD szakaszon olyan C_1 pont és az AB szakaszon olyan C_2, hogy CC_1AC_2 paralelogramma (3. ábra).



3. ábra

Ennek minden belső pontján át húzható olyan párhuzamos AB-vel és AD-vel a két trapéz másik alapja céljára, amely B és C, illetve D és C között halad el, továbbá $\beta > \alpha$ alapján a B csúcsú trapéz másik szára is benne lesz a négyszögben. Avégett pedig, hogy a D csúcsú trapéznak a DA-n levő csúcsában is δ nagyságú szöge lehessen, a keresett pontnak abban DAD_1 háromszögben is benne kell lennie, amelyre $D_1DA\sphericalangle = \beta$ és D_1 az AB oldal belső pontja. Ilyen D_1 van, mert $\beta < \delta$.

A paralelogrammának és a DAD_1 háromszögnek van közös belső pontja, legyen egy ilyen P. Innen párhuzamost húzva D_1D-vel, AD-vel, AB-vel, rendre az AD, DC, CB oldal egy–egy belső pontjában érjük el a négyszög kerületét – az ábrán rendre Q_1, Q_2, Q_3 –, végül az AB oldal belsejében olyan Q_4 is van, amelyre $PQ_4B\sphericalangle = Q_3BQ_4\sphericalangle = \beta$. Így az AQ_1PQ_4 konvex négyszögben Q_4-nél δ, Q_1-nél β szög van, tehát P-nél γ, és a PQ_3CQ_2 négyszög szögei is rendre α, β, γ, δ.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Tulajdonképpen elég lett volna egy szimmetrikus trapézt biztosítani a 4 rész közt, amint ezt az I. megoldás végén a téglalappal tettük. Így viszont áttekinthetőbben biztosítottuk, hogy $Q_3PQ_2\sphericalangle = BAD\sphericalangle$ legyen.

2. Rámutatunk egy kifejezésre, ami első pillanatra csupán nyelvi kérdésnek látszik. Mindkét megoldásban ezzel vezettük be, hogy mit akarunk tenni: „*elég* bizonyítanunk, hogy …”. Sokszor halljuk, olvassuk efféle helyzetekben: „azt *kell* bizonyítanunk, hogy …”.

Ha ez a „*kell*” itt helyes volna, akkor az I. megoldás célkitűzése ütné a II. megoldást, hiszen az utóbbi nem biztosítja az első szerint – más szavakkal – *szükséges, nélkülözhetetlen* téglalapot. (Fordítva viszont a szimmetrikus trapéz speciálisan lehet téglalap.)

Az „elég” azt jelenti: *így* – lehet, a „kell” pedig valami ilyet: *csak* így lehet. A „kell”-et mondót valószínűleg semmi külső körülmény *nem kényszeríti* a tervezett eljárásra, legföljebb az a belső körülmény, hogy *ő máshogy nem tudja.* Aki pedig megelégszik az „elég”-gel, az – esetleg – látja, hogy *máshogyan is lehetne.* Oda jutottunk tehát, hogy ennek a különbségnek a tisztán látása igen is lényeges matematikai kérdés, jobb áttekintést mutat a kérdésben.

3. Kézenfekvő abból kiindulni, hogy a húrnégyszöget a köréje írt kör O középpontjából az oldalakra bocsátott merőlegesekkel vágjuk 4 részre. Ez azonban hármas esetszétválasztásra vezet aszerint, hogy O belső vagy kerületi pontja-e a négyszögnek, illetve ha O kívül van; így a bizonyítás a fentieknél valamivel hosszabb.