

Jelöljük általában $H(n)$ -nel az n pont által meghatározott hegyesszögű háromszögek lehető legnagyobb számát, vagyis $H(n)$ -nek megvan a következő két tulajdonsága: *a*) bárhogy adunk meg n pontot a síkon (kölcsönös helyzetük szerint), az általuk meghatározott hegyesszögű háromszögek száma nem nagyobb, mint $H(n)$, *b*) meg tudunk adni n pontot úgy, hogy az általuk meghatározott hegyesszögű háromszögek száma $H(n)$ legyen. Mivel n pont $T(n) = \binom{n}{3}$ háromszöget határoz meg, az összes háromszögek legfeljebb $h(n) = \frac{H(n)}{T(n)}$ része lehet hegyesszögű. Feladatunk állítása ezzel a jelöléssel a

$$(1) \quad h(100) \leq 0,7$$

egyenlőtlenséget jelenti, ezt fogjuk bizonyítani. Ennek érdekében először azt mutatjuk meg, hogy $h(n)$ az n növelésével monoton csökken.

Vegyünk fel tetszőlegesen $(n + 1)$ pontot és jelöljük az általuk meghatározott hegyesszögű háromszögek számát $K(n+1)$ -gyel. (Az előbb definiált $H(n+1)$ az ilyen konkrét $K(n+1)$ -számok között a legnagyobbik, ha az $(n+1)$ pontot minden lehetséges módon felvesszük.) Tegyük fel, hogy a pontok sorszámozva vannak, és hagyjuk el közülük az elsőt. A visszamaradó n pont által meghatározott hegyesszögű háromszögek számát jelöljük $K_1(n)$ -nel. Hasonló módon jelöljük $K_j(n)$ -nel a j -ik pont elhagyása után visszamaradó n pont által meghatározott hegyesszögű háromszögek számát. Az

$$(2) \quad S_n = K_1(n) + K_2(n) + \dots + K_{n+1}(n)$$

összegben az eredeti $(n + 1)$ pont által meghatározott hegyesszögű háromszögek száma szerepel, de minden ilyen háromszöget többször vettünk számításba. Egy adott hegyesszögű háromszög ugyanis csak akkor nem szerepel $K_j(n)$ -ben, ha a j -ik pont az illető háromszögnek csúcsa. Ez a háromszög tehát a (2) összeg 3 tagjában nem szerepel, vagyis $(n - 2)$ tagjában szerepel. Emiatt S_n a hegyesszögű háromszögek számának $(n - 2)$ -szerese, azaz

$$(3) \quad S_n = (n - 2) \cdot K(n + 1).$$

Említettük már, hogy $K(n + 1) \leq H(n + 1)$, és hasonlóan $K_j(n) \leq H(n)$. Emiatt a (2) összeg bármelyik tagja nem nagyobb, mint $H(n)$, és így

$$S_n \leq (n + 1) \cdot H(n),$$

ahonnan (3) alapján a

$$K(n + 1) \leq \frac{n + 1}{n - 2} H(n)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel ez tetszőleges $(n + 1)$ pontra érvényes, teljesül ez az egyenlőtlenség, a $K(n + 1)$ számok legnagyobbikára, $H(n + 1)$ -re is:

$$(4) \quad H(n + 1) \leq \frac{n + 1}{n - 2} \cdot H(n).$$

Behelyettesítve H helyére a h -val kifejezett értékét, a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\begin{aligned} h(n + 1) \cdot \binom{n + 1}{3} &\leq \frac{n + 1}{n - 2} \cdot h(n) \cdot \binom{n}{3} \\ \frac{1}{6} h(n + 1) \cdot \{(n + 1)n(n - 1)(n - 2)\} &\leq \frac{1}{6} (n + 1) \cdot h(n) \cdot \{n(n - 1)(n - 2)\}, \\ h(n + 1) &\leq h(n), \end{aligned}$$

$h(n)$ tehát valóban monoton csökken.

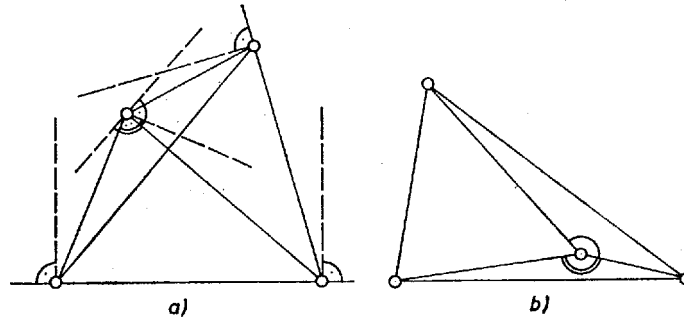
Mármost ahhoz, hogy (1)-et bebizonyítsuk, elegendő olyan $n \leq 100$ számot találni, melyre

$$(5) \quad h(n) \leq 0,7,$$

hiszen $h(n)$ monoton volta miatt (5)-ből következik (1).

Ha $n = 3$, akkor $h(3) = 1$, ez még túl nagy.

Ha $n = 4$, akkor $H(4) < 4$, mert nem lehet négy pontot úgy megadni, hogy az általuk meghatározott háromszögek mind hegyesszögűek legyenek. Ha ugyanis a négy pont konvex burka négyszög (az ábra *a*) része), e négyszög négy csúcsában levő szögei nem lehetnek mind hegyesszögek (összegük 360°), van köztük derékszög vagy tompaszög, ennek a csúcsát és a négyszög vele szomszédos másik két csúcsát véve, derékszögű vagy tompaszögű háromszöget kapunk.



Ha pedig a négyszög konvex burka háromszög, vegyük e konvex burok oldalaihoz harmadik csúcshoz a negyedik pontot, amelyik a háromszög belsejében van (az ábra *b*) része). E három háromszögnek a belső pontra támaszkodó szögeinek összege 360° , köztük van tompaszög, vagyis a megfelelő háromszög tompaszögű háromszög. Ezzel beláttuk, hogy $H(4) < 4$. Viszont az ábra *a*) része olyan esetet mutat, amikor $K(4) = 3$, tehát $H(4) = 3$, $h(4) = 0,75$, és ez még mindig nagyobb, mint $0,7$.

Ha $n = 5$, akkor (4) szerint $H(5) \leq \frac{5}{2}H(4) = 7,5$, viszont $H(5)$ egész szám, tehát $H(5) \leq 7$, és $h(5) \leq 0,7$. Ezzel (5)-öt beláttuk az $n = 5$ értékre, amivel feladatunk állítását a fentebbiek szerint bebizonyítottuk.

Komjáth Péter