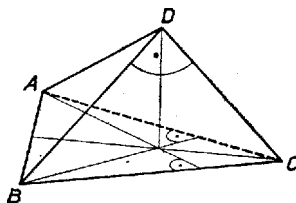


Az 1694. feladatban bebizonyítottuk,¹ hogy ha egy tetraéder egyik csúcsának a szemben levő lap síkján levő merőleges vetülete egybeesik annak a lapháromszögnek a magasságpontjával, akkor ez a tulajdonsága a tetraéder mindegyik csúcsának megvan.



Mostani feladatunk második feltevése szerint a D csúcsnak megvan a mondott tulajdonsága, ezért az A csúcsnak is; tehát A merőleges vetülete a BCD lap S síkján a D csúcs, hiszen az első föltevés szerint a BCD lap D -nél derékszögű háromszög, és így magasságpontja maga D . Ezek szerint AD merőleges S -re, és így ennek DB , DC egyenesére is, tehát az ADB és az ADC háromszög is derékszögű, a tetraéder D -ből induló élei páronként merőlegesek egymásra.

Tetraéderünk származtatható egy téglatestből, elmetszve ezt a D csúcsában összefutó 3 él A , B , C végpontjaival meghatározott síkkal.

Alakítsuk az állítás jobb és bal oldalának K különbségét így:

$$\begin{aligned}
 K &= 3(AD^2 + BD^2) + 3(BD^2 + CD^2) + 3(AD^2 + CD^2) - (AB + BC + CA)^2 = \\
 &= 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2) - 2(AB \cdot BC + BC \cdot CA + \\
 &+ CA \cdot AB) = (AB - BC)^2 + (BC - CA)^2 + (CA - AB)^2.
 \end{aligned}$$

(2)

(Az első alak kéttagú kifejezéseit Pitagorasz tétele alapján helyettesítettük a megfelelő átfogó négyzetével, az utolsó alak tagjait pedig alkalmas csoportosítás alapján írtuk fel.)

(2) szerint K nem lehet negatív, tehát az állítás helyes. (1)-ben akkor és csak akkor érvényes az egyenlőségi jel, ha $K = 0$, azaz (2) mindhárom tagja külön is 0, vagyis ha $AB = BC = CA$, a tetraéder ABC lapja szabályos háromszög, többi 3 lapja egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszög. A fent említett származtatás szerint kockából kiindulva kapunk ilyen tetraédert.

Engedi Antal (Makó, József A. Gimn. IV. o. t.)

¹K. M. L. 41 (1970) 118. o.