I. megoldás. A $b_n \geq 0$ állítás nyilvánvaló, hiszen (1) alapján (2)-nek egyetlen tagja sem negatív. Másrészt (2) tagjai így alakíthatók:

$$\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}=\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}}=\frac{(\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k-1}})(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}})}{a_k\sqrt{a_k}}\leq$$

$$\leq\frac{2\sqrt{a_k}(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}})}{a_k\sqrt{a_k}}=\frac{2(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}})}{a_k}\leq\frac{2(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}})}{\sqrt{a_k\cdot a_{k-1}}}=\frac{2}{\sqrt{a_{k-1}}}=\frac{2}{\sqrt{a_k}},$$

ezért a $k=1,2,\ldots,n$ összegezés közbülső tagjainak 2–2 hányadosa az előtte, ill. utána álló tag egyik hányadosával együtt 0-t ad, és csak az első és utolsó tag egyik-egyik hányadosa marad meg:

$$b_n\leq\frac{2}{\sqrt{a_0}}-\frac{2}{\sqrt{a_n}}=2-\frac{2}{\sqrt{a_n}}.$$

A jobb oldal kisebb, mint 2, tehát $b_n<2$, az I. állítást bebizonyítottuk.

II. A $0\leq c<2$ feltételt teljesítő, adott c számhoz egy alkalmas q (>1) hányadosú $a_0=1$, $a_1=q$, …, $a_n=q^n$, … mértani sorozatot fogunk megadni. Ekkor b_n egy (másik) mértani sorozat összege:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{q^{k-1}}{q^k}\right)\frac{1}{\sqrt{q^k}}=\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^k=\left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{q}}}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\frac{1}{\sqrt{q}}\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n\right\}=\left(\frac{1}{\sqrt{q}}+\frac{1}{q}\right)\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n\right\},$$

tehát a b_n értékeket kizárólag q és n határozzák meg.

Mármost c-hez megválasztható q úgy, hogy az első tényezőre teljesüljön

$$\frac{1}{\sqrt{q}}+\frac{1}{q}=Q>c.$$

Ez $c=0$ esetén minden $q>1$ számra teljesül, ezért tovább csak a $0<c<2$ értékeket tekintjük. Így pedig elegendő, hogy

$$1<q<\frac{2}{c}$$

legyen, hiszen akkor $1>1/q>0$ és $1/\sqrt{q}>1/q$, tehát

$$Q=\frac{1}{\sqrt{q}}+\frac{1}{q}>\frac{2}{q}>c,\qquad \text{és}\qquad \frac{c}{Q}<1.$$

Ennek alapján megmutatjuk, hogy q ilyen megválasztásával a

$$b_n=Q\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n\right\}>c,$$

vagyis az

$$1>1-\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n>\frac{c}{Q}\qquad(>0)$$

egyenlőtlenség teljesül minden olyan n-re, amely nagyobb egy bizonyos N-nél. Ez, mivel ilyen n index végtelen sok van, a II. állítás bizonyítását fogja jelenteni.

Valóban, a feltevés folytán az $r_n=(1\sqrt{q})^n$ sorozat monoton csökkenve 0-hoz tart, ha n minden határon túl nő, ezért van olyan N szám, hogy

$$0<\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n<1-\frac{c}{Q},$$

azaz hogy $(1/\sqrt{q})^n$ a $\left(0,\,1-\dfrac{c}{Q}\right)$ intervallumba esik minden $n>N$ szám esetében. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Göndőcs Ferenc, Füredi Zoltán, Komjáth Péter

II. megoldás. I. A következő alakítás szerint:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\cdot\frac{1}{a_k^{3/2}},$$

tehát a következő integrál egy közelítő összege áll előttünk:

$$\int_{a_0}^{a_n} \frac{1}{x^{3/2}} dx = \int_1^{a_n} x^{-3/2} dx,$$

hiszen az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pontok (1) alapján az $(a_0,\, a_n)$ intervallum $(a_n \geq a_0)$ egy felosztását adják – megengedve 0 hosszúságú részintervallumokat is. Az $x^{-3/2}$ függvény $x > 0$ esetén folytonos és pozitív, tehát az integrál létezik és pozitív. A függvény monoton fogyó, és minden egyes részintervallum hosszát a jobb végpontjában fölvett függvényértékkel szoroztuk, ezért b_n alsó közelítő összege az integrálnak. És mivel az integrál értéke

$$I = \int_1^{a_n} x^{-3/2} dx = \left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2} \right]_1^{a_n} = -2\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} - 1 \right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{a_n}} < 2,$$

azért $0 < b_n \leq I < 2$, amint a feladat állítja.

II. A fenti integrálnak ugyanazon felosztáshoz tartozó felső közelítő összege nagyobb az integrál értékénél:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}^{3/2}} > \int_1^{a_n} \frac{dx}{x^{3/2}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right),$$

de ha az a_{k-1}/a_k hányadosok sorozata alulról korlátos, azaz ha van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

(3) $$1 \geq \frac{a_{k-1}}{a_k} > \delta > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

akkor B_n nem lényegesen nagyobb b_n nél:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}^{3/2}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \right)^{3/2} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^{3/2}} < \frac{1}{\delta^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^{3/2}} = \frac{b_n}{\delta^{3/2}}.$$

Ha tehát (3) teljesül, akkor

(4) $$b_n > 2\delta^{3/2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right).$$

Válasszuk meg d-t úgy, hogy $c < d < 2$ legyen, majd válasszuk meg δ-t úgy, hogy

$$2\delta^{3/2} > d, \qquad \text{azaz} \qquad \delta > \left(\frac{d}{2} \right)^{2/3} = \delta_0$$

teljesüljön, ahol mivel $d < 2$, azért $\delta_0 < 1$. Így (4) szerint $b_n > c$ akkor mindenesetre teljesül, ha

(5) $$1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}} > \frac{c}{d}, \qquad \text{azaz} \qquad a_n > \left(\frac{d}{d - c} \right)^2 = D.$$

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy tetszőleges $0 < \delta < 1$ számhoz van olyan a_k sorozat, melyre a feladat feltételein kívül (3) teljesül, és végtelen sok n indexre (5) is teljesül.

Az utóbbi biztosan teljesül, ha a_n az n-nel együtt minden határon túl nő. Ha viszont a (3)-nál többet mondó

$$\sqrt{\delta} > \frac{a_{k-1}}{a_k} > \delta \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

is teljesül az a_n sorozatra, akkor

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_0} > \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)^n,$$

ahol $1/\sqrt{\delta} > 1$ miatt

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)^n = \infty,$$

és ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Reviczky János, Ferró József