

Az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ valós számokból álló sorozat eleget tesz a következő egyenlőtlenség-láncnak:

$$(1) \quad 1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

Ezután a $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$(2) \quad b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

I. a $0 \leq b_n < 2$ egyenlőtlenségpár minden n -értékre fennáll ;

II. bármely adott és a $0 \leq c < 2$ egyenlőtlenségpárt kielégítő c valós szám esetén létezik olyan, a (1)-nek eleget tevő $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozat, hogy a belőle képezett b_n számok közül végtelen sok nagyobb c -nél.