I. megoldás. Az addíció-tétel alapján átrendezve

$$f(x) = \cos\ x\left(\cos a_1 + \frac{\cos a_2}{2} + \frac{\cos a_3}{2^2} + \ldots + \frac{\cos a_n}{2^{n-1}}\right) -$$

$$- \sin x\left(\sin a_1 + \frac{\sin a_2}{2} + \frac{\sin a_3}{2^2} + \ldots + \frac{\sin a_n}{2^{n-1}}\right) = A\cos x - B\sin x, \tag{2}$$

és itt az A és B kifejezéseknek legalább az egyike 0-tól különböző, mert $f(x)$ nem azonosan 0. Valóban, az $x = -a_1$ helyen (1) szerint

$$f(-a_1) = 1 + \frac{\cos(a_2 - a_1)}{2} + \frac{\cos(a_3 - a_1)}{2^2} + \ldots + \frac{\cos(a_n - a_1)}{2^{n-1}},$$

és itt minden egyes számlálóra fennáll $\cos(a_i - a_1) \geqq -1 (i = 2, 3, \ldots, n)$, ezért

$$f(-a_1) \geqq 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} > 0.$$

Ha mármost pl. $B \neq 0$, akkor $f(x)$ zérus helyeire (2)-ből

$$\operatorname{tg}\ x = \frac{A}{B},$$

és ha ennek x_1 eleget tesz, akkor a tg x függvény periodikus volta alapján, és mert egy perióduson belül minden valós értéket egyszer vesz fel, minden más gyöke

$$x_2 = x_1 + m\pi$$

alakú, hol m egész szám. Ebből adódik az állítás.

Ha pedig éppen $B = 0$, akkor $A \neq 0$, és így (2)-ből

$$\cos x = 0,$$

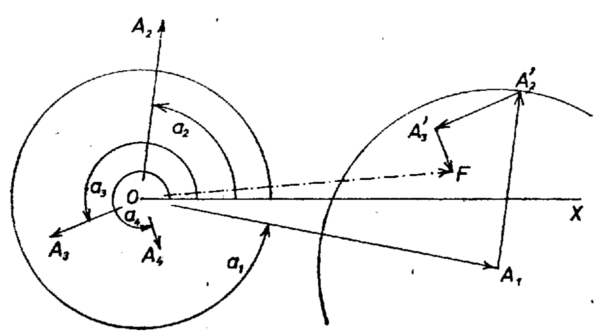
ennek zérus helyei $(4k+1)\pi/2$ és $(4k+3)\pi/2$ (ahol k egész), és könnyű belátni, hogy bármely kettőjüknek különbsége egész többszöröse π-nek.

Martani Viktor (Veszprém, Lovassy L. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Válasszunk egy O kezdőpontot, és egy OX félegyenest alapiránynak, és rakjuk fel az OA_i vektort $(i = 1, 2, \ldots, n)$, melynek abszolút értéke $1/2^{i-1}$ és irányszöge (ívmértékben) a_i. E vektorok OX irányú komponenseinek összege, ami ugyanaz, mint OF összegüknek OX irányú komponense, nyilvánvalóan az $f(0)$ hosszúságú és 0, ill. π irányszögű vektor aszerint, hogy $f(0) \geqq 0$, ill. $f(0) < 0$. OF nem 0-vektor, mert

$$\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 = \overrightarrow{OA}_1 = \overrightarrow{A_1A'_2} = \overrightarrow{OA'_2}$$

abszolút értéke nem kisebb 1/2-nél, hiszen A'_2 az A_1 középpontú, 1/2 sugarú kör kerületén van, és e körnek O-hoz legközelebbi pontja az OA_1 szakasz felező-pontja. Ugyanígy kapjuk, tagról tagra képezve a részösszegeket, hogy QA_n hozzáadása után $|OF| \geqq 1/2^n$.



Tetszőleges x-re (1) szerint úgy kapjuk az $f(x)$ abszolút értékű és 0 vagy π irányszögű vektort, hogy mindegyik vektorunkat elfordítjuk O körül x ívmértékű szöggel, és így vesszük OX irányú komponensük összegét. Ezt egyszerűbben úgy is nyerhetjük, hogy OF-et fordítjuk el x-szel és ennek OX irányú komponense a mondott vektor.

Eszerint $f(x)$ akkor és csak akkor 0, ha $OF \perp OX$, az ezt eredményező x forgásszögek pedig π egész számú többszöröseiben különböznek egymástól. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Láz József (Budapest, Eötvös J. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Az I. megoldás $B = 0$ esete azt jelenti, hogy F az OX egyenesen adódott.