

Vonjuk ki az (1_i) egyenlet mindkét oldalából x_i -t (ahol $i = 1, 2, \dots, n$):

$$(1') \begin{cases} (1'_1) & ax_1^2 + (b-1)x_1 & +c = x_2 - x_1, \\ (1'_2) & ax_2^2 + (b-1)x_2 & +c = x_3 - x_2, \\ \dots & \dots\dots\dots \\ (1'_{n-1}) & ax_{n-1}^2 + (b-1)x_{n-1} & +c = x_n - x_{n-1}, \\ (1'_n) & ax_n^2 + (b-1)x_n & +c = x_1 - x_n. \end{cases}$$

Eszerint az egyenletrendszer megoldásában $i = 1, 2, \dots, n-1$ esetén x_{i+1} annyival nagyobb x_i -nél, mint az

$$f(x) = ax^2 + (b-1)x + c$$

másodfokú függvények az x_i helyen felvett $f(x_i)$ értéke, és x_1 az $f(x_n)$ értékkel nagyobb, mint x_n .

a) Mármost az I. feltevés esetén $f(x)$ előjele állandó és megegyezik a előjével, mert így írható:

$$(2) \quad f(x) = a \left[\left(x + \frac{b-1}{2a} \right)^2 - \frac{(b-1)^2 - 4ac}{4a^2} \right],$$

és a szögletes zárójelbeli kifejezés pozitív. Eszerint – feltéve, hogy van valós megoldás és $a > 0$ – az $(1')$ egyenletek jobb oldalán álló különbségek mindegyike pozitív, emiatt

$$(3) \quad x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_1.$$

Ez pedig ellentmondás, hiszen a szigorúan növekedő sorozat elején és végén ugyanaz a szám áll: x_1 , ilyen megoldás tehát nincs.

Ugyanez adódik $a < 0$ esetén abból, hogy $(1')$ mindegyik egyenletének mindkét oldala negatív, és ezért

$$(4) \quad x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{n-1} > x_n > x_1.$$

β) A II. feltevés esetén $f(x)$ a (2) alak szerint egyetlen helyen, az

$$(5) \quad x = \frac{1-b}{2a}$$

helyen a 0 értéket veszi fel, minden más helyen olyan előjelű, mint a . Ennél fogva az $(1')$ -beli jobb oldali különbségek – az előbbi esethez képest – a 0 értéket is felvehetik (de a -val ellentétes előjelű értéket nem), (3) és (4) helyére a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n \leq x_1 & \quad (\text{ha } a > 0), \text{ ill.} \\ x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_{n-1} \geq x_n \geq x_1 & \quad (\text{ha } a < 0). \end{aligned}$$

Bármelyikük csak úgy állhat fenn, ha

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n,$$

tehát $(1')$ -ben mindegyik jobb oldal értéke 0, és az ismeretlenek közös értéke az $f(x) = 0$ egyenlet egyetlen gyöke, az (5) érték. Ez a megoldás egyértelmű.

γ) Az eddigiek alapján könnyű belátni, hogy a III. feltevés esetén az egyenletrendszernek két olyan megoldása van, amelyben minden ismeretlen értéke ugyanaz, éspedig az $f(x) = 0$ egyenlet egyik, ill. másik gyöke:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = x_n = \frac{1-b + \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}}{2a},$$

mert III. miatt a mondott értékek valóságosak és különbözők. Eszerint egynél több valós megoldás van.

Ezzel mindhárom állítást bebizonyítottuk.

Fazekas Béla (Pannonhalma, Bencés Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Példát mutatunk arra, hogy a III. feltevés esetén az egyenletrendszernek 2-nél több megoldása is lehet. $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{19}{2}$, $c = 17$ esetén $(b-1)^2 - 4ac = \frac{33}{4} > 0$, és a fentiek szerinti

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{21 \pm \sqrt{33}}{6}$$

megoldásokon kívül $n = 3$ esetén az egyenletrendszert az

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 2$$

értékrendszer is kielégíti (és természetesen a ciklikus fölcseréléssel adódó 3, 2, 4 valamint 2, 4, 3 megoldás is).

Fazekas Béla