I. megoldás. Megmutatjuk, hogy x legfeljebb 2 jegyű lehet. Legyen ugyanis n-jegyű, vagyis

$$10^{n-1} \leq x < 10^n,$$

ekkor, ha $n \geq 2$, megbecsülve (1) bal oldalát felülről, a jobbat alulról

$$9^n \geq p(x) = x(x-10) - 22 \geq 10^n(10^{n-2} - 1) - 22,$$

és ha $n > 2$, akkor a jobb oldal 10^n-nél nagyobb, tehát nem állhat fenn az egyenlőtlenség.

Legyen mármost $x = 10a + b$, akkor (1) jobb és bal oldalának különbsége így írható:

$$100a(a-1) + 19ab + b^2 - 10b - 22 = 100a(a-1) + 19ab + (b-5)^2 - 47 = 0.$$

Itt csak $a = 1$ lehet, mert ha $a > 1$, akkor az első 3 tag összege 100-nál nagyobb, másrészt $a = 0$ sem lehet, mert 47 nem négyzetszám.

Ha $a = 1$, (1)-ből a

$$b(b+9) = 22$$

egyenlet adódik, amelynek egyetlen pozitív egész megoldása $b = 2$, tehát a keresett szám $x = 12$.

Göndőcs Ferenc (Győr, Révai M. Gimn.)

II. megoldás. Mivel (1) bal oldalán $p(x) \geq 0$, egyenletünknek csak azok között a számok között van megoldása, amelyekre a jobb oldal sem negatív:

$$x^2 - 10x - 22 \geq 0.$$

Az egyenlőség az

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{188}}{2} \approx -1{,}8; \qquad x_2 = \frac{10 + \sqrt{188}}{2} \approx 11{,}8$$

számokra teljesül, tehát egyenlőtlenségünk megoldása: $x \leq x_1$, és $x \geq x_2$. Mivel x természetes szám, $x \geq 12$. Az első érték, $x = 12$, megoldása egyenletünknek.

Megmutatjuk, hogy más megoldás nincs. Ha $x \geq 13$ akkor a jobb oldalon

$$x^2 - 10x - 22 = (x-12)(x+2) + 2 \geq (x+2) + 2 > x,$$

viszont $p(x) < x$. Valóban, ha x n jegyű ($n \geq 2$), akkor $x = 10^{n-1}A + B$, ahol A az x szám első jegye, és a többi $(n-1)$ jegy szorzata legfeljebb 9^{n-1}. Emiatt

$$p(x) \leq A \cdot 9^{n-1} < 10^{n-1}A + B = x.$$

Tehát egyenletünk egyetlen megoldása $x = 12$.

Fazekas Árpád (Nyíregyháza, Vasvári P. Gimn.)
Gyöngy István (Budapest, Ságvári E. Gyak. Gimn.)