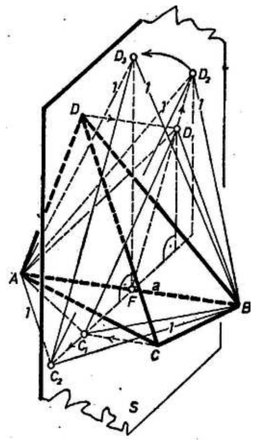
Legyen a kérdéses $ABCD = T$ tetraéderen $CD > 1$, ekkor az AB élben találkozó ABC és ABD háromszöglapok egyik oldala sem nagyobb 1-nél. Úgy fogjuk módosítani T-t, hogy a feltételek továbbra is teljesüljenek és az új térfogat minél nagyobb legyen. Állítsuk T-t az ABC lapra és toljuk el C és D csúcsát AB-vel párhuzamosan az AB él S felező merőleges síkjába, a C_1, ill. D_1 helyzetbe (ha valamelyik e csúcsok közül éppen S-ben van, azt változatlanul hagyjuk).



Így az $ABC_1D_1 = T_1$ tetraéder térfogata egyenlő T-nek V térfogatával, mert ABC_1, ill. ABC alaplapjuk területe, valamint rá merőleges magasságuk egyenlő, hiszen DD_1 párhuzamos az alaplap síkjával. A C_1A, C_1B, D_1A, D_1B élek egyike sem nagyobb 1-nél, mert ha pl. eredetileg $AC > BC$ állt, akkor $C_1B = C_1A < CA \le 1$.

Toljuk el C_1-et az alapsíkban, D_1-et az ABD síkban az AB szakasz felező merőleges egyenese mentén a C_2, ill. D_2 helyzetbe úgy, hogy $C_2B = D_2B = 1$ legyen. Így az $ABC_2D_2 = T_2$ tetraéder V_2 térfogata nagyobb V-nél, vagy egyenlő vele, hiszen sem ABC_2 alaplapjának területe, sem erre merőleges magassága nem kisebb T_1 fent említett alaplapjánál, ill. magasságánál.

Fordítsuk végül az ABD_2 lapot az alapsíkra merőleges helyzetbe, és legyen D_2 új helyzete D_3, ekkor az $ABC_2D_3 = T_3$ tetraéder V_3 térfogatára egyrészt $V_3 \ge V_2 \ge V$, másrészt AB hosszát a-val, felezőpontját F-fel jelölve

$$V_3 = \frac{AB \cdot FC_2}{2} \cdot \frac{FD_3}{3} = \frac{AB \cdot FC_2^2}{6} = \frac{a}{6}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right),$$

hiszen az AB alap és vele szemben a C_2, D_2, ill. D_3 csúcs egybevágó egyenlőszárú háromszögeket határoz meg, egységnyi szárral.

A feladat állításának bizonyításául elég belátnunk, hogy ha $(0 <) a \le 1$, akkor $V_3 \le 1/8$ térfogategység. Valóban,

$$\frac{1}{8} - V_3 = \frac{1}{24}\big(3 - 4a + a^3\big) = \frac{1}{24}\big(1 - a\big)\big(3 - a - a^2\big) \ge 0,$$

mert az utolsó alakban egyik zárójeles tényező sem negatív, hiszen a másodikban sem a, sem a^2 nem nagyobb 1-nél. Ha $a = 1$, akkor $V_3 = 1/8$, és $C_2D_3 = = a\sqrt{3/2} > 1$ qmallskip

Hernádi János (Budapest, Berzsenyi D. gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. T_2-höz egy lépésben jutunk a következő meggondolással. Az élekre tett feltevés miatt T benne van az A és B csúcsok köré írt egységsugarú gömbök közös részében. Ezek az ABC lap síkját egységsugarú körökben metszik, és e két kör egyik metszéspontja a fenti C_2, a két kör közös részének az AB egyenestől legtávolabbi pontja. Ugyanígy a két gömb közös részében egyetlen pont sem lehet messzebb az AB egyenestől, mint C_2, és D_2 az ABD lapsíknak az a pontja az AB egyenesnek D-t tartalmazó oldalán, ahol e lapsík által a két gömbből kimetszett egységkör metszi egymást.