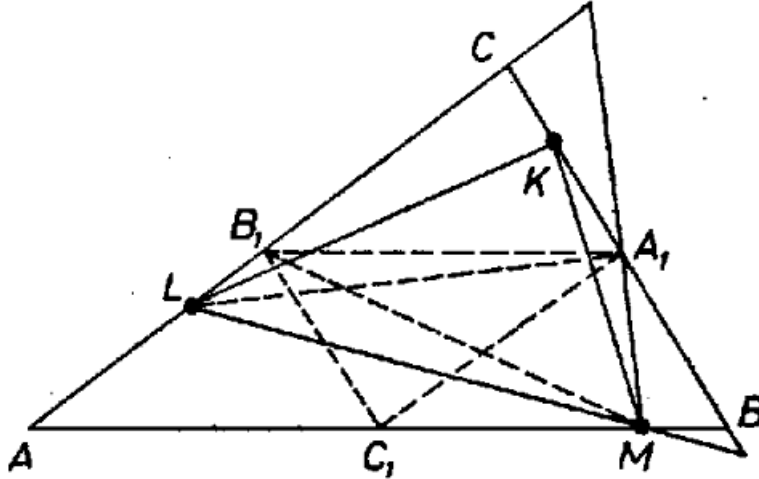


I. megoldás: Jelöljük a BC , CA , AB oldal felezőpontját A_1 , B_1 , C_1 -gyel.



Ha a kiszemelt csúcsok közül kettő az eredeti háromszög oldalainak közös csúcsú felén van, pl. K és L a CA_1 -en, ill. CB_1 -en, akkor

$$t_{CKL} \leq t_{CA_1B_1} = \frac{1}{4}t_{ABC}.$$

Ha viszont K , L , M pl. rendre a CA_1 , AB_1 , BC_1 szakasz belsejében van, akkor belátjuk, hogy

$$t_{KLM} > \frac{1}{4}t_{ABC}.$$

Ebből már következik, hogy a másik három részháromszög valamelyikének területe kisebb az egész terület negyedénél, és ezt kell belátni.

Az LM egyenes a BC oldal B -n túli meghosszabbítását metszi, így a t_{KLM} csökken, ha K -t A_1 -be visszük át. Hasonlóan MA_1 az AC oldal C -n túli meghosszabbítását metszi, így L -et B_1 -be víve tovább csökken a középháromszög területe, a keletkező A_1B_1M háromszög területe viszont az $A_1B_1C_1$ háromszögével egyenlő, ami az ABC háromszög negyedrésze. A KLM háromszög területe tehát ennél nagyobb, amint állítottuk.

II. megoldás. Legyen $AM : AB = \mu$, $BK : BC = \varkappa$, $CL : CA = \lambda$, továbbá az ABC , MAL , KBM , LCK háromszög területe rendre t , t_a , t_b , t_c . Így a feltevés szerint μ , \varkappa , λ az 1-nél kisebb pozitív számok, továbbá $BM : AB = 1 - \mu$, $CK : BC = 1 - \varkappa$, $AL : CA = 1 - \lambda$.

Az A -nál közös szöggel bíró MAL és BAC háromszögek területének aránya

$$(1) \quad \frac{t_a}{t} = \frac{AM \cdot AL}{AB \cdot AC} = \mu(1 - \lambda),$$

ugyanígy

$$(2) \quad \frac{t_b}{t} = \varkappa(1 - \mu), \quad \frac{t_c}{t} = \lambda(1 - \varkappa),$$

és ezeket összeszorozva

$$(3) \quad \frac{t_a t_b t_c}{t^3} = \varkappa(1 - \varkappa)\lambda(1 - \lambda)\mu(1 - \mu).$$

Ámde

$$0 < \varkappa(1 - \varkappa) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \varkappa\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

és ugyanígy

$$0 < \lambda(1 - \lambda) \leq \frac{1}{4}, \quad 0 < \mu(1 - \mu) \leq \frac{1}{4},$$

és ezeket összeszorozva kapjuk, hogy (3) bal oldala nem nagyobb $1/4^3$ -nél. Ezért az (1) és (2) hányadosok közül legalább az egyik nem nagyobb $1/4$ -nél, tehát a feladat állítása helyes.

Bodor István (Veszprém, Lovassy L. Gimn.)

Megjegyzés. Ajánljuk az érdeklődőknek a II. megoldás egybevételét az 1961. évi Kürschák József matematikai tanulmányverseny 3. feladatára lapunkban¹ megjelent megoldásokkal.

¹Hajós György: Az 1961. évi Kürschák József matematikai tanulmányverseny feladatainak megoldása, K. M. L. 24 (1962) 98–107. o., szorosabban 101–104. o.