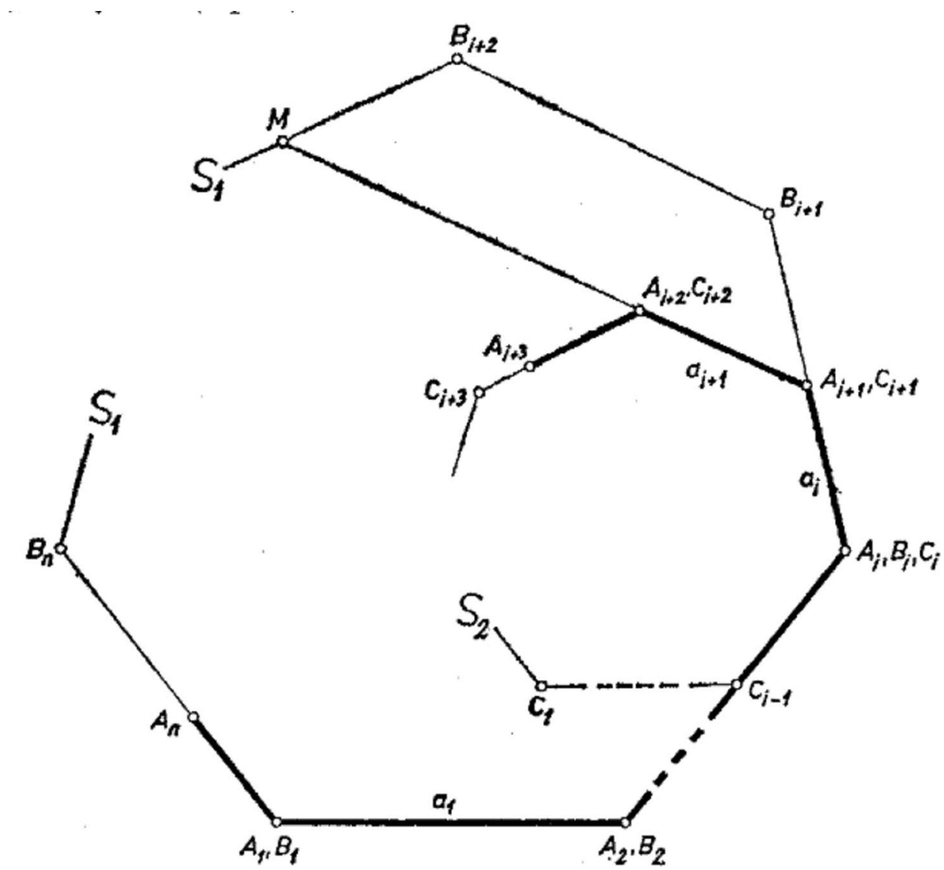
I. megoldás. Ha a kérdéses n-szög szögei egyenlők, akkor egyszersmind egyenlők a szabályos n-szög szögeivel. Ez viszont a bizonyítandó állítással együtt azt fejezi ki, hogy sokszögünk szabályos n–szög.



$n = 3$ esetére ismeretes, hogy ha egy háromszög mindhárom szöge egyenlő (ti. 60°), akkor oldalai is egyenlők, az állítás helyes. Közvetlenül belátható az állítás $n = 4$ esetére is. Ekkor derékszögű négyszögről van szó. Ebben a szemben levő oldalak párhuzamosak és egyenlők: $a_1 = a_3$ és $a_2 = a_4$. (1) szerint viszont a_2 nem nagyobb a_1-nél, és nem kisebb a_3-nál, így $a_2 = a_3$, és mind a négy oldal egyenlő.

$n \geqq 5$ esetére legyen a kérdéses n-szög $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n = A$, ahol $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2, \ldots$, $A_{n-1}A_n = a_{n-1}$, $A_nA_1 = a_n$, továbbá bármelyik két egymás utáni oldal közti szög $(n-2)$ $180°/n$, tompaszög. Megmutatjuk, hogy a (2)-vel ellentétes feltevés ellentmondásra vezet.

Legyen a_1, a_2, …, a_n közül a_i az első olyan, amely határozottan kisebb az előtte állónál:

$$a_1 = \ldots = a_{i-1} > a_i \geqq a_{i+1} \geqq \ldots a_n \ (i \geqq 2).$$

Tekintsük azt az a_1 oldalú $B_1B_2 \ldots B_n = S_1$ szabályos n-szöget, amelynek első két csúcsa azonos A_1-gyel, ill. A_2-vel, és amely az A_1A_2 egyenesnek ugyanazon oldalán van, mint A. Ekkor A_1, A_2, …, A_i rendre azonos B_1, B_2, …, B_i-vel, de A_{i+1} már a B_iB_{i+1} szakasz közbülső pontja; ebből következik az is, hogy $i < n$, mert különben az A_{i+1} szerepét átvevő A_1 nem lehetne azonos B_1-gyel. A következő $A_{i+1}A_{i+2}$ oldal S_1 belsejében van. Ha ugyanis az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenesnek S_1 kerületével való, A_{i+1}-től különböző közös pontja M, akkor az A_{i+1}-nél és B_{i+1}-nél levő szögek egyenlősége miatt az $A_{i+1}B_{i+1}B_{i+2}M$ négyszög trapéz, benne – mint láttuk – B_{i+1}-nél és B_{i+2}-nél tompaszög van, ezért

$$A_{i+1}M > B_{i+1}B_{i+2} = a_1 > a_i \geqq a_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2}.$$

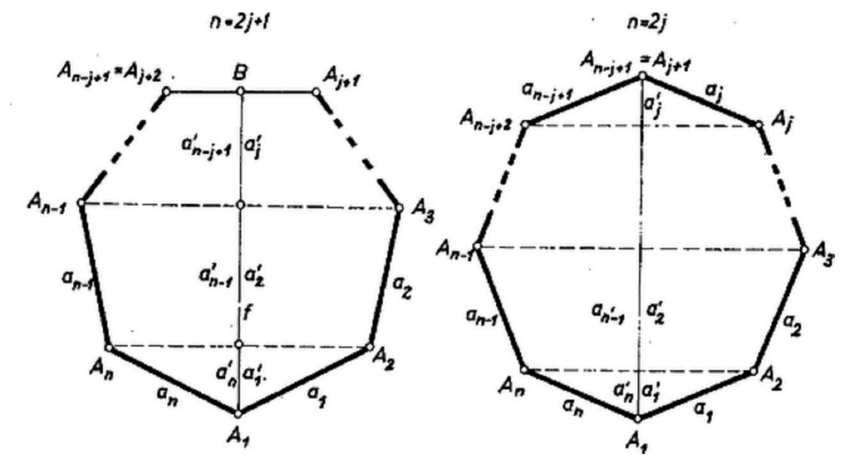
Ebből az is következik, hogy $i < n-1$, mert ha $i = n-1$, akkor A_{i+2}-n A_1-et kellene értenünk, de ez nincs S_1 belsejében.

Ha mármost (1) további részében mindenütt ismét egyenlőség áll: $a_i = a_i{+}1 = \ldots = a_n$, akkor hasonló meggondolás mutatja, hogy az A_{i+2}, A_{i+3}, …, A_n csúcsok azonosak annak az a_i oldalú $C_1C_2 \ldots C_n = S_2$ szabályos n-szögnek C_{i+2}, C_{i+3}, …, C_n csúcsaival, amelynek C_iC_{i+1} oldala azonos A_iA_{i+1}-gyel, és amely az A_iA_{i+1} egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint A. S_2 az S_1-nek $a_i : a_1 (< 1)$ arányú kicsinyítettje, és S_1-gyel hasonló helyzetű a közös A_i csúcsra, mint középpontra nézve. Ezért C_{i-1}, C_i és C_{i+1} kivételével S_2 minden csúcsa S_1 belsejében van. Az A_n-nel azonos C_n nincs az S_1 kerületén levő 3 csúcs között, mert mint láttuk, $i < n-1$.

Azt kaptuk tehát, hogy feltevéseink mellett A_n az S_1-re nézve belső pont. Ez ellentmondásban van azzal, hogy A-nak és S_1-nek közös csúcsa A_1, és így A_n a B_nA_1 szakaszon van, esetleg ennek B_n végpontjában, mindenesetre S_1 kerületén.

Ha pedig (1)-nek a_i és a_n közötti részében további határozott egyenlőtlenségek állnának fenn, ebből az előbbi eljárás ismétlésével kapnók, hogy A_n belső pontja egy rendre kisebb oldalú S_3, S_4, ... szabályos n-szögnek, amelyeknek nincs közös csúcsuk S_1-gyel, és egészen benne vannak S_1-ben – ez pedig ismét ellentmondás azzal, hogy A_n-nek S_1 kerületén kell lennie, mint fent láttuk. Legfeljebb annyi újabb szabályos n-szöget kellene figyelembe vennünk, ahány helyen (1)-ben határozott egyenlőtlenség áll fenn. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Aczél Gábor (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)
dolgozata kiegészítésekkel.



II. megoldás. Továbbra is használva az I. megoldás jelöléseit, az A és S_1 n-szögek oldalai rendre párhuzamosak egymással. Legyen $n = 2j$, ill. $n = 2j + 1$ aszerint, amint n páros vagy páratlan. Legyen az $A_nA_1A_2$ szög f felezőjén A_{j+1}, merőleges vetülete B. Ha n páratlan, akkor f merőleges az $A_{j+1}A_{j+2}$ oldalra, így A_1B mindkét esetben egyrészt az $A_1A_2 \dots A_{j+1}$ törött vonalnak, másrészt az $A_1A_nA_{n-1} \dots A_{n-j+1}$ törött vonalnak a vetülete f-en, a két vetület különbsége tehát 0. Jelöljük az a_i oldal vetületét f-en a'_i-vel, ekkor tehát

$$(a'_1 - a'_n) + (a'_2 - a'_{n-1}) + \ldots + (a'_j - a'_{n-j+1}) = 0. \tag{3}$$

A két sokszög szögeinek egyenlő voltából következik, hogy az $ak = A_kA_{k+1}$ és $a_{n-k+1} = A_{n-k+2}\,A_{n-k+1}$ oldal ($k = 1,\,2,\,\ldots,\,j$) ugyanakkora, csak ellenkező irányú φ_k szöget zár be f-fel, és a sokszög konvex volta miatt ez a szög hegyes szög, esetleg $0°$, ti. ha párhuzamosak. Ezért

$$a'_k - a'_{n-k+1} = (a_k - a'_{n-k+1})\cos\varphi_k \geqq= 0,$$

tehát (3) csak úgy teljesülhet, ha mindegyik különbség 0, így többek közt $a'_1 - a'_n = 0$, amiből $a_1 = a_n$ következik. Ezt (1)-gyel összekapcsolva következik (2).

Nagy Péter Tibor (Kiskunhalas, Szilády Á. g. IV. o. t.)
dolgozata, kiegészítéssel.