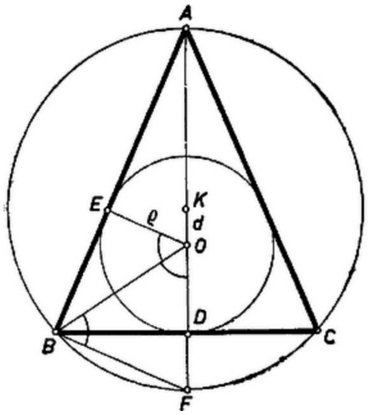
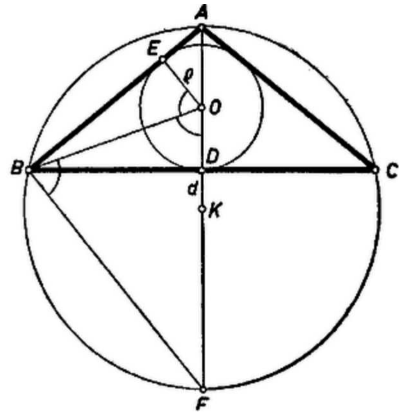
Ha a háromszög egyenlő oldalú, akkor a két kör középpontja egybeesik és egyben a háromszög súlypontja is. Így $r=2\varrho$, mert r-et a súlyvonalnak a csúcs felé eső 2/3 része adja, ϱ-t pedig a súlyvonalnak az oldal felé eső 1/3 része. A bizonyítandó egyenlőség fennáll, mert mindkét oldala 0.





Legyen az ABC háromszögben $AB=AC$, a beírt kör középpontja O, BC-n és AB-n levő érintési pontja D, ill. E, a körülírt kör középpontja K, és A-val átellenes pontja F. A BAC szög AO felezője azonos az AF szimmetriatengellyel, így az AEO és ABF háromszögek hasonlók, mert A-nál levő szögük közös, másrészt az érintés, ill. Thalész tétele miatt OE is, FB is merőleges az AB szárra. Ezért

(2) $$AO:AF=OE:FB.$$

Az FBO háromszög egyenlő szárú. Ugyanis OE és FB párhuzamosak, ezért OBF és BOE váltószögek, egyenlők, az utóbbi pedig egyenlő a $BOD=BOF$ szöggel, mert D az E tükörképe a BO szögfelezőre. Így $FB=FO$, tehát (2)-ből

(3) $$AO\cdot FB=AO\cdot FO=AF\cdot OE=2r\varrho.$$

A K középpont a $2r$ hosszúságú AF szakasz középpontja, és O is ezen a szakaszon van, az egyik végponttól $r+d$, a másiktól $r-d$ távolságra, tehát (3)-ból

(4) $$r^2-d^2=2r\varrho.$$

Az (1) állítás innen átalakítással adódik.

Szilágyi Tivadar (Budapest, II. Rákóczi F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldók nagy része a fentinél több számítással jutott eredményre. Egyenleteket írtak fel az a alap, a b szár, az m magasság, a $2s$ kerület és a t terület, valamint a két sugár között. Számos dolgozat nem vette azonban figyelembe K és O minden lehetséges elhelyezkedését.

2. Néhányan bebizonyították, hogy (1) minden háromszögre érvényes. [1]

[1] *V. ö. Kürschák–Hajós–Neukomm–Surányi: Matematikai Versenytételek I.* o. Középiskolai Szakköri Füzet (Tankönyvkiadó, Budapest 1955) 41. o.