

I. megoldás. Ismeretes, hogy $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Kifejezhetjük $\cos 3x$ -et is $\cos x$ -szel:

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - \\ (2) \quad &-2(1 - \cos^2 x) \cos x = (4\cos^2 x - 3) \cos x. \end{aligned}$$

Ezekkel (1) így alakul

$$\begin{aligned} \cos^2 x + 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 + (16 \cos^4 x - 24 \cos^2 x + 9)\cos^2 x &= 1, \\ 2 \cos^2 x(8 \cos^4 x - 10 \cos^2 x + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Ez úgy lehet 0, ha valamelyik tényező 0. A második tényező eltűnése $\cos^2 x$ -re másodfokú egyenletet ad. Ezt megoldva azt nyerjük, hogy (1) akkor teljesül, ha

$$\text{vagy } \cos^2 x = 0, \quad \text{vagy } \cos^2 x = \frac{3}{4}, \quad \text{vagy } \cos^2 x = \frac{1}{2},$$

azaz ha

$$\begin{aligned} x_1 = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, \quad x_2 = 30^\circ + n \cdot 180^\circ, \quad x_3 = 150^\circ + n \cdot 180^\circ, \\ x_4 = 45^\circ + n \cdot 180^\circ, \quad x_5 = 135^\circ + n \cdot 180^\circ \quad (n \text{ egész szám}). \end{aligned}$$

A $0^\circ - 360^\circ$ intervallumban az egyenletnek 10 megoldása van.

Az első három és az utolsó két megoldás összevonva egyszerűbben írható fel:

$$x' = 30^\circ + n \cdot 60^\circ, \quad x'' = 45^\circ + n \cdot 90^\circ.$$

Ringler András (Esztergom, I. István g. III. o. t.)

II. megoldás. Az egyenletet 0-ra redukálva a bal oldalt a

$$2 \cos u \cos v = \cos(u - v) + \cos(u + v)$$

azonosság ismételt alkalmazásával szorzattá alakíthatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \cos^2 3x - 1 &= \cos 3x \cos x + \cos^2 3x = \\ &= \cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 2 \cos 3x \cos x \cos 2x = 0. \end{aligned}$$

Így a gyökök a következő három egyenletből számíthatók:

$$\begin{array}{lll} \cos 3x = 0, & \cos x = 0, & \cos 2x = 0, \text{ és pedig} \\ 3x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, & x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, & 2x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ. \end{array}$$

Az I. megoldás (2) azonossága mutatja, hogy $\cos x = 0$ mellett $\cos 3x = 0$ is teljesül, ezért a második egyenlet nem hoz új gyököket. A megoldás ismét

$$x = 30^\circ + n \cdot 60^\circ, \quad \text{és} \quad x = 45^\circ + n \cdot 90^\circ,$$

ahol n egész szám.

Torner Zoltán (Budapest, Piarista Gimn. III. o. t.)