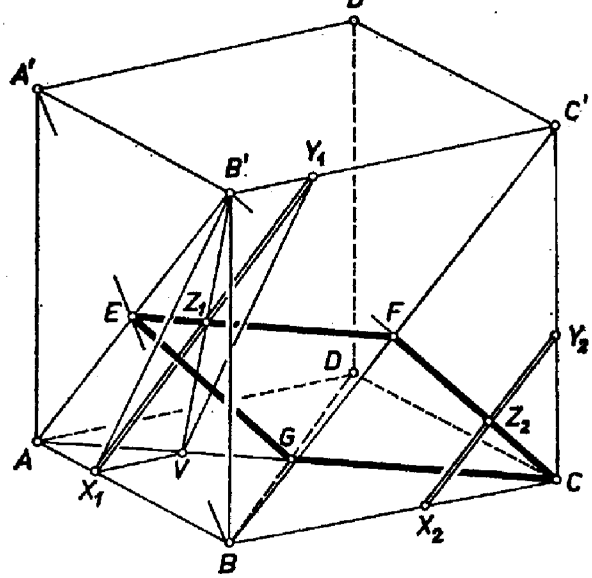
Mivel X és Y ugyanabban a pillanatban indulnak, továbbá sebességük és pályájuk hossza is egyenlő – ti. a kocka élének 4-szerese –, azért mozgásukat egyszerre is fejezik be.Egyidejűleg érkeznek pályáik második, harmadik és negyedik szögpontjába is. Két kockaél befutása után X is, Y is C-ben van (1. ábra), ebben a helyzetben az XY szakasz Z felezőpontját azonosnak vesszük X-szel és Y-nal, tehát Z a C-ben van. Z az AB' lapbeli átló E felezőpontjából indul és végül ide tér vissza, a mozgás első, ill. harmadik negyedében pedig a BC' átló F, ill. a DB átló G felezőpontjában van. Megmutatjuk, hogy Z pályája – mértani helye – az $EFCG$ négyszög kerülete.



1. ábra

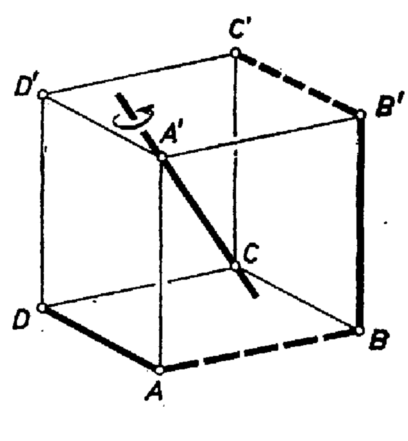
Legyen X egy bizonyos pillanatban az AB él egy közbülső X_1 pontjában. Ugyanekkor Y a $B'C'$ él azon Y_1 pontjában van, amelyre $B'Y_1 = AX_1$. Tekintsük azt a síkot, amely átmegy az X_1, Y_1, B' pontokon, messe ez az AC átlót V-ben. Ekkor $X_1V \parallel BC$, mert síkunk az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ párhuzamos síkokat az X_1V és $B'Y_1$ egyenesekben metszi, $B'Y_1$ viszont párhuzamos BC-vel. Így AX_1V egy derékszögű egyenlő szárú háromszög, $X_1V = AX_1$, tehát az X_1V és $B'Y_1$ szakaszok irányukon felül hosszukban is megegyeznek. Ezért az X_1VY_1B' négyszög paralelogramma, ennélfogva X_1Y_1 átlójának Z_1 felezőpontja – a kiszemelt pillanatban éppen itt van a Z mozgó pont – $B'V$ átlót is felezi. Végül a $B'V$ szakasz Z_1 felezőpontja mindig az EF szakaszon van, mert $B'V$ az ACB' háromszög B' csúcsát köti össze az AC oldal V pontjával, EF pedig az előrebocsátottak szerint ennek a háromszögnek AC-vel párhuzamos középvonala (F a $B'C$-t is felezi). Amíg tehát X leírja AB-t, addig V (ugyancsak egyenletes, de X-énél $\sqrt{2}$-ször nagyobb sebességgel) leírja AC-t, Z pedig EF-et.

Az EF szakasz minden Z_1 pontja előáll az XY szakasz egy helyzetéből: a megfelelő V-t $B'Z_1$ metszi ki AC-ből, X_1-et pedig V-nek AB-n levő vetülete adja – magán a szakaszon van –, ezzel Y_1 is meg van határozva, éspedig a $B'C'$ szakaszon.

Mozgásuk második szakaszában X és Y a $BCC'B'$ síkban mozognak, bármely időpillanatban elfoglalt X_2, Y_2 helyzetükre $BX_2 = C'Y_2$. Így $CX_2 = CY_2$, a CX_2Y_2 derékszögű háromszög egyenlő szárú, az X_2Y_2 átfogó Z_2 felezőpontján – Z-nek pillanatnyi helyzetén – az X_2CY_2 szög felezője is átmegy, tehát $X_2CZ_2\sphericalangle = 45°$, így Z_2 a CB' átlón van, pontosabban annak FC szakaszán.

Az FC szakasz minden Z_2 pontja kiadódik XY egy helyzetéből, ennek végpontjait a Z_2-n át FC-re állított merőleges metszi ki BC-ből, ill. $C'C$-ből.

X és Y mozgásának harmadik szakasza, a CD, ill. CB szakasz leírása, az $ABCD$ síkban folyik le. A második szakaszéhoz hasonló meggondolás mutatja, hogy ebben az időszakban Z a CG szakaszt írja le.



2. ábra

Végül a mozgás negyedik szakasza az első szakaszhoz hasonló, mert X-nek és Y-nak ez alatt leírt DA, ill. BB' pályaszakaszai ugyanolyan kölcsönös helyzetben vannak, mint az első időszak AB, ill. $B'C'$ szakasza (2. ábra): egymásba vihetők át azzal a forgással, amelynek tengelye az $A'C$ testátló és amely D-t B-be viszi át. Az $A'A$, $A'B'$, $A'D'$, ill. CB, CC', CD ugyanis egymásra merőlegesek, a tengellyel pedig a kocka szimmetriája miatt egyenlő szöget zárnak be. Így a mondott forgás egymásba viszi át őket, tehát a tengelyre nem eső végpontjaikat is.

A mértani hely gyanánt kapott $EFCG$ négyszög paralelogramma, mert EF párhuzamos és egyenlő az AC lapbeli átló felével, GC-vel. Az FC oldal is ekkora, ezért a mértani hely rombusz alakú. (Könnyű belátni azt is, hogy hegyes szöge 60°-os. Ugyanis FG átlójának és EG oldalának végpontjai egyaránt két szomszédos kockalap középpontjai.)

Saftics György (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzés. Többen térbeli koordinátarendszert használtak a bizonyításban.