I. megoldás. A bal oldal akkor és csak akkor valós, ha egyik négyzetgyökjel alatt sem áll negatív szám:

(2) $$x+1 \geqq 0 \quad \text{és} \quad 3-x \geqq 0, \quad \text{tehát} \quad -1 \leqq x \leqq 3.$$

Az egyenlőtlenséget

$$\sqrt{3-x} > \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}$$

alakban írva a (2) alatti x-ekre egyik oldal sem negatív, ez az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, amikor (1) is fennáll. Ezért a -1 és 3 közti x-ekre a négyzetre emeléssel és rendezéssel adódó

(3) $$\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Itt a bal oldal nem lehet negatív. Ez újabb korlátozást ad x-re:

(4) $$x < \frac{7}{8}.$$

Ezen x-ekre szorítkozva (3) újabb négyzetre emelésével, majd rendezéssel és gyöktényezőkre bontással

$$4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0,$$
$$4\left(x - \frac{8+\sqrt{31}}{8}\right)\left(x - \frac{8-\sqrt{31}}{8}\right) > 0.$$

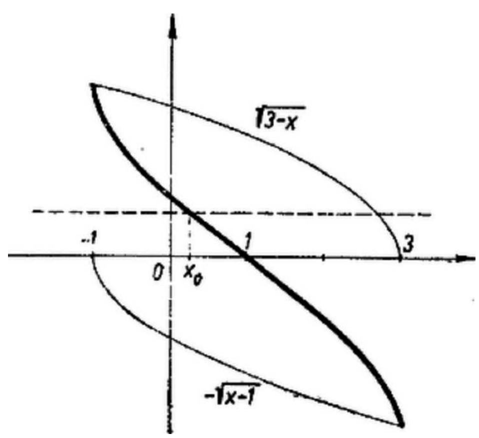
Ez akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét különbség pozitív, vagy ha mindkettő negatív:

$$x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}, \qquad \text{vagy } x < 1 - \frac{\sqrt{30}}{8}.$$

Az első ellentmond (4)-nek, a második pedig (4)-nél erősebb korlátozást ad. Ezt (2)-vel egybevetve a keresett x értékekre

$$-1 \leq x < 1 - \sqrt{31}/8.$$

Hegedűs Csaba (Nagykanizsa, Landler J. g. III. o. t.)



II. megoldás. A $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}$ függvény a $-1 \leqq x \leqq 3$ intervallumban bír értelemmel. A függvény x növekedésével csökken. Ugyanis nagyobb számnak a négyzetgyöke is nagyobb, kisebbé kisebb, így ha x növekszik, $3-x$ és vele együtt $\sqrt{3-x}$ is csökken, $x+1$ és $\sqrt{x+1}$ növekszik, tehát $-\sqrt{x+1}$ csökken, ennélfogva

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = \sqrt{3-x} + \left(-\sqrt{x+1}\right)$$

függvény mindkét összeadandója, s ezért az összeg is csökken.

A -1 helyen a függvény értéke 2, nagyobb 1/2-nél, így a feladat kérdésére válaszolhatunk úgy, hogy meghatározzuk azt az x_0 számot, amelyre a függvény az 1/2 értéket veszi fel. Ekkor (1) azokra az értékekre teljesül, amelyekre $-1 \leqq x < x_0$. A

(5) $$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}$$

egyenletből kétszeri négyzetre emeléssel és rendezésekkel sorra

$$4-2\sqrt{(3-x)(x+1)}=\frac{1}{4},\qquad 225=64(3+2x-x^2)$$
$$64x^2-128x+33=0.$$

Az (5) egyenletet csak ennek az egyenletnek a gyökei, vagyis az $1+\sqrt{31}/8$ és $1-\sqrt{31}/8$ értékek elégíthetik ki. Az előbbire (5) bal oldala negatív, hiszen az $x=1$ helyen 0, és láttuk, hogy növekedő x-szel csökken. Az utóbbi helyen

$$\sqrt{3-\left(1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right)}=\frac{\sqrt{32+2\sqrt{31}}}{4}=\frac{\sqrt{31+2\sqrt{31}+1}}{4}=\frac{\sqrt{31}+1}{4},\ \text{és}$$
$$\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right)+1}=\frac{\sqrt{31-2\sqrt{31}+1}}{4}=\frac{\sqrt{31}-1}{4}.$$

Így az (5) egyenlet csak az $x_0=1-\dfrac{\sqrt{31}}{8}$ értékre teljesülhet és arra teljesül is. A feladatban szereplő egyenlőtlenség tehát teljesül azokra az x-ekre, amelyekre

$$-1\leqq x<1-\frac{\sqrt{31}}{8},$$

és más értékekre nem.

Horváth József (Esztergom, Temesvári Pelbárt g. III. o. t.)