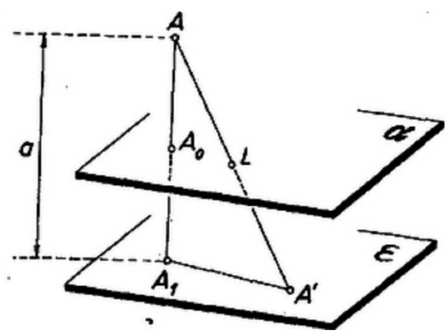
Tekintsük először az L pont mértani helyét, ha A' befutja az ε síkot. Legyen A vetülete ε-ra A_1, és az AA_1 szakasz hossza $a(\neq 0)$. Ha A' egybeesik A_1-gyel, akkor L az AA_1 szakasz A_0 felezőpontjában van. A' minden más helyzetében az LA_0 egyenes felezi az AA_1A' háromszög AA_1 és AA' oldalait, tehát e háromszögnek középvonala. Ezért LA_0 párhuzamos A_1A'-vel, tehát ε-nal is. Így L mindig benne van az A_0-on átmenő, ε-nal párhuzamos α síkban. Ez a sík egyszersmind L mértani helye is, mert ha α-nak egy tetszés szerinti pontja L, akkor az AL egyenes metszi ε-t egy A' pontban, és az AA' szakasz felezőpontja L.



1. ábra

Hasonlóan M és N mértani helye az az ε-nal párhuzamos β, ill. γ sík, amely ε-nak azon az oldalán van, mint A, B és C, és ε-tól való távolsága $b/2$, ill. $c/2$, ahol b a B-nek, c a C-nek ε-tól mért távolsága.

Legyen most A', B', C' az ε sík olyan ponthármasa, hogy a képezett L, M N pontok háromszöget alkotnak. G-t megadja az LM szakasz N_0 felezőpontját N-nel összekötő szakasznak N_0-tól számított első harmadoló pontja, vagyis amelyre $N_0G = N_0N/3$. Feltehetjük, hogy A, B, C-nek ε-tól mért távolságaira fennáll $a \leq b \leq c$ (egyenlőség csak az egyik helyen állhat, különben az ABC sík párhuzamos lenne ε-nal). Ekkor a β sík $(b-a)/2$-vel távolabb fekszik ε-tól, mint az a sík. A fentiekhez hasonlóan adódik, hogy N_0 rajta fekszik azon az ε-nal párhuzamos ν síkon, amely ε-nak azon az oldalán van, mint A, B, C és ε-tól mért távolsága

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{a+b}{4}.$$

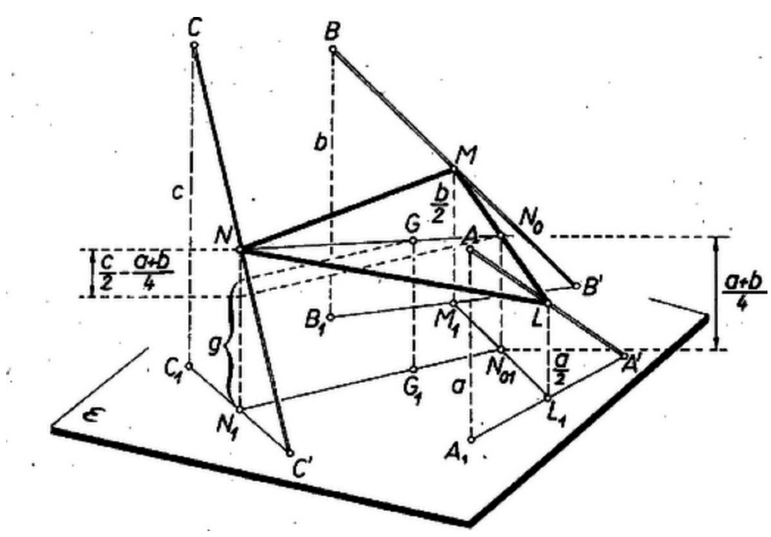
(Ezt először rögzített A' mellett kapjuk – vagyis rögzített L mellett –, majd belátjuk, hogy tetszés szerinti A'-vel ugyanerre a mértani helyre jutunk.)

Rögzített A' és B' mellett (azaz állandó L, M és N_0 mellett) hasonlóan adódik, hogy G azon az ε-nal párhuzamos σ síkon fekszik, amely ε-nak A, B, C-vel egyező oldalán van és ε-tól mért távolsága

$$\frac{a+b}{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{c}{2} - \frac{a+b}{4}\right) = \frac{1}{6}(a+b+c).$$

Nyilvánvaló ugyanis, hogy G-nek ε-tól mért távolsága annyival több N_0-nak ε-tól mért távolságánál, mint a ν és γ síkok távolságának 1/3 része. Ugyanezt kapjuk bármely A'-vel és B'-vel.

Megmutatjuk, hogy a σ sík bármely G pontjához lehet megadni ε-ban olyan A', B', C' ponthármast, amelyekből képezett L, M, N pontok nincsenek egy egyenesen, és az LMN háromszög súlypontja éppen G. Ez az előzőkkel együtt azt jelenti, hogy G mértani helye a σ sík.



2. ábra

Legyen B, C, G vetülete ε-ra B_1, C_1, G_1. Vegyünk ε-ban egy G_1 től különböző tetszés szerinti N_1 pontot, mérjük fel az N_1G_1 szakasz G_1-en túli meghosszabbítására e szakasz felét, legyen a végpont N_{01}, és mérjünk fel egy az N_{01}-en átmenő, $N_{01}G_1$-től különböző tetszés szerinti egyenesre N_{01}-től mindkét irányban egy tetszés szerinti szakaszt, legyenek a végpontok L_1 és M_1. Végül vegyük A', B', C' gyanánt A_1-nek L_1-re, ill. B_1-nek M_1-re, ill. C_1-nek N_1-re vett tükörképét. – Ekkor az A', B', C'-ből képezett L, M, N pontok ε-ra való vetülete nyilván L_1, M_1, N_1, továbbá az LMN háromszög G súlypontjának ε-ra való vetülete G_1. Ugyanis – párhuzamos vetítés mellett – az egy egyenesen levő szakaszok aránya nem változik meg, egy szakasz felező (ill. harmadoló) pontjának vetülete felezi (harmadolja) a szakasz vetületét. L_1, M_1, N_1 szerkesztésnél fogva háromszöget alkotnak, ezért N nincs benne az ε-ra L_1M_1-en át merőlegesen álló, az L és M-et magában foglaló síkban, tehát L, M, N is háromszöget alkotnak. – Ezzel az állítás bizonyítását befejeztük.

Aleva György (Budapest, Radnóti M. gyak. g. IV. o. t.)