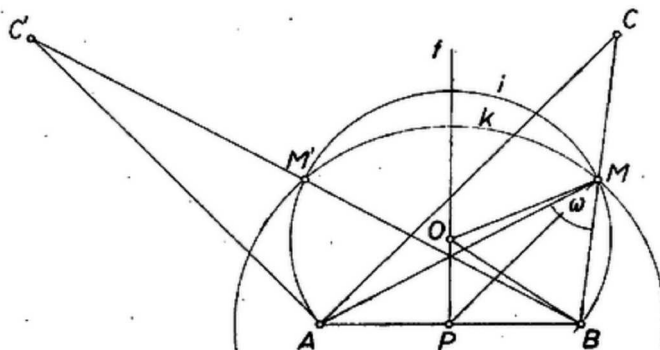


I. megoldás. Az AB szakasz középpontját P -vel jelölve az ABM háromszög MP súlyvonala egyben az ABC háromszögnek középvonala, s így $b/2$ hosszúságú. Ennek alapján ez a háromszög megszerkeszthető: az $AB = c$ szakaszt felvéve M számára egy mértani hely az AB szakasz ω nyílású i látószögmérvé, és egy másik a P körül $b/2$ sugárral írt k kör. (Elég mindkettőt az AB egyenes egyik partján megszerkeszteni, ti. amelyen C -t kapni kívánjuk; így az AB -re szimmetrikus megoldás felesleges előállítását elkerüljük.) Ezután C -t mint B tükörképét kapjuk az M pontra.



A szerkesztés helyessége nyilvánvaló. A megoldások száma 2, 1, vagy 0, i és k közös pontjainak száma szerint. 2 megoldás esetén az ABM és BAM' háromszögek az AB szakasz f felező merőlegesére tükrösek, és így egybevágók, az ABC és ABC' háromszögek azonban nem egybevágók.

Az AMB és AMC háromszögekben az MA oldal közös, $MB = MC$, a közbezárt szögek közül $AMB = \omega$ hegyesszög, ezért AMC szög tompaszög, így $AB < AC$, másképpen

$$(2) \quad c < b.$$

Legyen az i körív középpontja O . Ha az M metszéspont létrejön, akkor

$$(3) \quad PO + OM \geq PM = \frac{b}{2}.$$

Mivel ω hegyesszög, azért O az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint i . Így a középponti és kerületi szögek közti összefüggés szerint $\angle POB < \omega$, tehát

$$PO = PB \operatorname{ctg} \omega = \frac{c}{2} \operatorname{ctg} \omega, \quad OM = OB = \frac{PB}{\sin \omega} = \frac{c}{2 \sin \omega}.$$

Ezeket (3)-ba beírva (és a két oldalt felcserélve)

$$\frac{b}{2} \leq \frac{c}{2} \left(\operatorname{ctg} \omega + \frac{1}{\sin \omega} \right) = \frac{c}{2} \cdot \frac{1 + \cos \omega}{\sin \omega} = \frac{c}{2} \frac{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{c}{2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}},$$

ugyanis

$$1 + \cos \omega = \sin^2 \frac{\omega}{2} + \cos^2 \frac{\omega}{2} + \cos^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2} = 2 \cos^2 \frac{\omega}{2}.$$

A nyert egyenlőtlenség (1) bal oldalának átrendezett alakja. Ennek teljesülnie kell, ha a háromszög szerkeszthető. Fordítva, ha a nyert egyenlőtlenség teljesül, akkor (3) is, de akkor a P -ben AP -re emelt merőleges előbb metszi i -t, mint k -t, viszont (2) folytán A és B , az i körív végpontjai, k belsejében vannak, tehát i -nek és k -nak van közös pontja.

Udvardy Antal (Budapest, Táncsics M. g. III. o. t.)

Megjegyzés. C -t az M pont megszerkesztése nélkül is megkaphatjuk, ha ti. a PBM háromszögnek a B középpontból 2-szeresre nagyított képét szerkesztjük

Nárai György (Budapest, Bem J. g. III. o. t.)

II. megoldás. Húzzuk meg egy tetszés szerinti B^*C^* szakasz M^* felezőpontjából az M^*B^* -gal ω szöget bezáró félegyeneset. Messe ezt a B^* és C^* alappontokhoz és a $c : b$ aránymutatóhoz tartozó Apollóniosz kör A^* -ban. Ekkor $A^*B^*C^*$ a keresetthez hasonló háromszög. A^* -tól B^* , ill. C^* felé felmelve az $A^*B = c$, ill. $A^*C = b$ szakaszt, az A^*BC háromszög nyilvánvalóan megfelelő.

Megmutatható, de elég sok számítást igényel, hogy a félegyenes és a kör közös pontja létezésének feltétele éppen az állításbeli (1).

Bodoky Andrea (Budapest, Teleki Blanka lg. IV. o. t.)