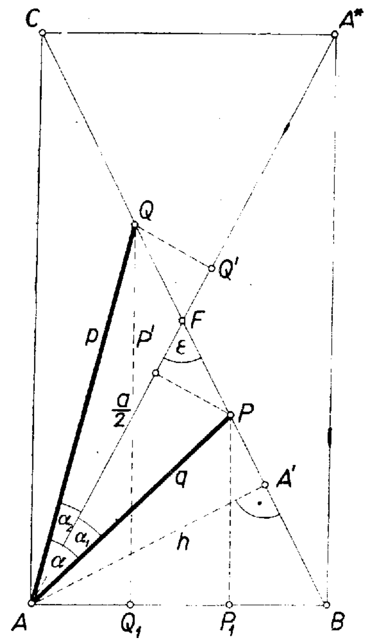
I. megoldás. A semmitmondó $n=1$ esetet figyelmen kívül hagyjuk, mert ekkor $\alpha=90^\circ$, és így sem $\operatorname{tg}\alpha$, sem a jobb oldalon álló hányados nincs értelmezve. – Legyen az átfogónak az F felezőpontot tartalmazó szakasza PQ úgy, hogy a pontok sorrendje az átfogón B, P, F, Q, C. Legyen $AP=q$ és $AQ=p$.



Mivel $PQ=a/n$ és az APQ háromszögnek a PQ alaphoz tartozó magassága h, azért e háromszög területét kétféleképpen kifejezve

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{h}{2}=\frac{pq}{2}\sin\alpha,\quad \text{és innen}\quad \sin\alpha=\frac{ah}{npq}.$$

Másrészt a koszinusz-tétellel

$$\cos\alpha=\frac{p^2+q^2-\dfrac{a^2}{n^2}}{2pq},\quad \text{és így}\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2ah}{n\left(p^2+q^2-\dfrac{a^2}{n^2}\right)}.$$

A p^2+q^2 összeget kifejezhetjük az adatokkal abból, hogy F a részekre osztott BC átfogó középső PQ szakaszát is felezi, tehát $PF=FQ=a/2n$, másrészt, hogy $AF=a/2$. Legyen $AFP\sphericalangle=\varepsilon$, ekkor $AFQ\sphericalangle=180^\circ-\varepsilon$, ezért az AQF és APF háromszögekből a koszinusz-tétellel

$$p^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2n}\right)^2+2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2n}\cos\varepsilon,$$
$$q^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2n}\right)^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2n}\cos\varepsilon,$$

tehát

$$p^2+q^2=2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2n}\right)^2\right]=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2n^2}=\frac{(n^2+1)a^2}{2n^2}. \tag{1}$$

Most már folytatólag

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2ah}{\dfrac{(n^2+1)a^2}{2n}-\dfrac{a^2}{n}}=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

Urbán László (Székesfehérvár, József A. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. (1)-et abból is megkaphatjuk, hogy véve A-nak F-re vonatkozó A^* tükörképét az APA^*Q négyszög paralelogramma, melynek oldalai p és q, átlói $2AF=a$ és $PQ=a/n$, és így az 1006. feladat segédtétele szerint[1]

$$a^2+\frac{a^2}{n^2}=2(p^2+q^2).$$

[1] Lásd K. M. L. 21 (1960) 20. o.

Molnár Emil (Győr, Révai M. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Legyen $PAF\sphericalangle=\alpha_1$, $FAQ\sphericalangle=\alpha_2$, P, Q vetülete az AF egyenesen P', Q', végül A vetülete BC-n A'. Ha az ABC háromszög egyenlő szárú, akkor $AF\perp BC$, $h=a/2$, P' és Q' az F-be esik, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha/2$, és $\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha/2=1/n$, amiből

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{2}{n}}{1-\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2n}{n^2-1},$$

ami az állításnak erre az esetre adódó egyszerűsödött alakja.

Ha ABC nem egyenlő szárú, akkor feltehetjük, hogy $AB<AC$. Így $BFA\sphericalangle=2BCA\sphericalangle$ hegyesszög, tehát P' az AF szakaszon, Q' pedig FA^*-on van. Nyilvánvaló, hogy az FPP' és FQQ' derékszögű háromszögek egybevágók, és így $PP'=QQ'$, $FP'=FQ'$, tehát a PAP' és QAQ' derékszögű háromszögekből

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{PP'}{AP'}=\frac{PP'}{AF-FP'},\quad \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{QQ'}{AQ'}=\frac{PP'}{AF+FP'},$$

tehát

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{\dfrac{PP'}{AF-FP'}+\dfrac{PP'}{AF+FP'}}{1-\dfrac{PP'^2}{AF^2-FP'^2}}=\frac{2AF\cdot PP'}{AF^2-(FP'^2+PP'^2)}=$$
$$=\frac{BC\cdot PP'}{AF^2-FP^2}=\frac{aPP'}{\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4n^2}}=\frac{4n^2\cdot PP'}{(n^2-1)a}.$$

Másrészt az FPP' derékszögű háromszög hasonló FAA'-höz, mert F-nél levő szögük közös, ezért

$$\frac{PP'}{AA'}=\frac{FP}{FA}=\frac{a/2n}{a/2}=\frac{1}{n},\quad \text{tehát}\quad PP'=\frac{h}{n},$$

ezt $\operatorname{tg}\alpha$ legutóbbi kifejezésébe helyettesítve az állítást kapjuk.

Kiss Ildikó (Budapest, Teleki Blanka lg. III. o. t.)

III. megoldás. Számíthatjuk α-t különbségként is, pl. $\alpha=BAQ\sphericalangle-BAP\sphericalangle$. Legyen P, Q vetülete AB-re P_1, Q_1; ekkor a P_1BP, Q_1BQ derékszögű háromszögek hasonlók ABC-höz, és átfogójuk a BC átfogó n-edrészének $(n-1)/2$-szöröse, ill. $1+(n-1)/2=(n+1)/2$-szöröse – ugyanis a BP és QC szakaszokba az F-et tartalmazó szakasz elvételével megmaradt $n-1$ számú szakasz fele-fele jut –, tehát

$$P_1P=\frac{BP}{BC}AC=\frac{n-1}{2n}AC,\qquad Q_1Q=\frac{n+1}{2n}AC,$$
$$P_1B=AQ_1=\frac{n-1}{2n}AB,\qquad Q_1B=AP_1=\frac{n+1}{2n}AB,$$

hiszen egyenlő és egyirányú szakaszoknak ugyanazon egyenesre való vetületei egyenlők. Ezekkel

$$\operatorname{tg}BAQ\sphericalangle=\frac{Q_1Q}{AQ_1}=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{AC}{AB},\qquad \operatorname{tg}BAP\sphericalangle=\frac{P_1P}{AP_1}=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{AC}{AB},$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(BAQ\sphericalangle-BAP\sphericalangle)=\frac{\left(\dfrac{n+1}{n-1}-\dfrac{n-1}{n+1}\right)\cdot\dfrac{AC}{AB}}{1+\dfrac{AC^2}{AB^2}}=\frac{4nAB\cdot AC}{(n^2-1)BC^2}.$$

Végül figyelembe véve, hogy az $AB\cdot AC$ szorzat az ABC háromszög 2-szeres területét adja, ami az adatokkal kifejezve ah-val egyenlő, továbbá, hogy $BC=a$, $\operatorname{tg}\alpha$-nak az állításban szereplő kifejezésére jutunk.

Sebestyén Mihály (Szolnok, Verseghy F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Számos dolgozat α-t az $A'AQ$ és $A'AP$ szögek különbségeként számította, sokan mások pedig a külső szög tétele alapján mint az APA' és AQA' szögek különbségét.

Ha az AB és AC befogók közt elég nagy a különbség, vagy ha n elég nagy szám, akkor P és Q valóban A' ugyanazon oldalára esnek, és α az előbb említett két szög különbsége. De A' szét is választhatja P-t és Q-t. Némelyek erre is kitértek, $A'P$-nek $A'Q$-hoz képest előjelet tulajdonítottak, hasonlóan az $A'AP$ szöget forgásszögnek tekintették. Ezt a diszkussziót a III. megoldás elkerülte azzal, hogy a PAQ szögtartományon biztosan kívül eső AB irányt választotta alapiránynak. – Az említett második számításmód mellett pedig gondolni kellett volna arra a lehetőségre is, ha P éppen A'-be esik, és így az $A'PA$ (ill. BPA) szög derékszög, tangense nincs értelmezve.

2. Az átfogó osztás pontjai közül csak P és Q-t használtuk, és az n számot is csak annyiban, hogy $PQ : BC = 1 : n$. Ezért n nemcsak páratlan természetes szám lehet, hanem bármely 1-nél nagyobb pozitív szám. ($0 < n < 1$ is lehet, vagyis $PQ > BC$. *Szerk.*) A kikötés csak az, hogy a PQ szakasz tükrös legyen F-re.

Kovács Imre (Békés, Szegedi Kis I. g. IV. o. t.)