Legyenek egy a kívánt tulajdonsággal bíró N szám jegyei balról jobbra a, b, c, ekkor

$$N = 100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2). \tag{1}$$

A bal oldalt $99a + 11b + (a + c - b)$ alakban írva osszuk az egyenletet 11-gyel:

$$9a + b + \frac{a + c - b}{11} = a^2 + b^2 + c^2. \tag{2}$$

Eszerint a $k = a + c - b$ kifejezés osztható 11-gyel, mert a többi kifejezés egész szám.

Mivel a jegyekre $1 \le a \le 9$ és $0 \le b$, $c \le 9$, azért k legnagyobb értéke a legnagyobb a, c-vel és a legkisebb b-vel $9 + 9 - 0 = 18$, k legkisebb értéke pedig a legkisebb a, c-vel és a legnagyobb b-vel $1 + 0 - 9 = -8$, így $k/11$-re

$$-1 < -\frac{8}{11} \le \frac{k}{11} \le \frac{18}{11} < 2,$$

tehát $k/11$ értéke 0, vagy 1, és k értéke 0 vagy 11.

Ha $k = 0$, vagyis $= a + c$, akkor (2)-ből b kiküszöbölésével a és c-re a

$$2a^2 + 2ac + 2c^2 - 10a - c = 0$$

kétismeretlenes diophantoszi egyenletet kapjuk. Ezt a-ra rendezve

$$2a^2 + (2c - 10)a + (2c^2 - c) = 0, \tag{3}$$

a diszkrimináns:

$$D = (2c - 10)^2 - 8(2c^2 - c) = 4(-3c^2 - 8c + 25),$$

ez a 0 értéket a $c_1 \approx -4{,}51$ és $c_2 \approx 1{,}84$ értékek környezetében veszi fel, és csak ezek között pozitív. Így c-re csak a 0, 1 értékek jönnek szóba. $c = 1$-gyel D nem teljes négyzet, tehát nem ad egész a-t; $c = 0$-val pedig (3) így alakul:

$$2a^2 - 10a = 0,$$

ahonnan $a = 5$, vagy 0. De csak $a = 5$ lehet kezdő számjegy, evvel $b = 5$, és $N = 550$. Ez megfelel (1)-nek.

$k = 1$-gyel $b = a + c - 11$, és az előzőekhez hasonlóan

$$2a^2 + (2c - 32)a + (2c^2 - 23c + 131) = 0, \tag{4}$$
$$D = 4(-3c^2 + 14c - 6).$$

D a $c_1 \approx 0{,}48$ és $c_2 \approx 4{,}19$ értékek között pozitív, de a közbe eső $c = 1$, 2, 3, 4 egész értékek közül csak $c = 3$ mellett teljes négyzet; evvel (4)-ből

$$2a^2 - 26a + 80 = 0,$$

ahonnan a értéke 5, vagy 8. Azonban $a = 5$ és $c = 3$-mal $b = -3$, ami nem számjegy. Az $a = 8$, $c = 3$-mal adódó $b = 0$-val $N = 803$, megfelel (1)-nek.

Minden lehetőséget figyelembe véve azt találtuk, hogy két olyan háromjegyű természetes szám van, amely jegyei négyzetösszegének 11-szeresével egyenlő, ezek: 550 és 803.

Kóta Gábor (Tatabánya, Árpád g. IV. o. t.)