

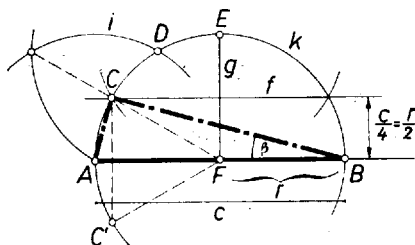
*Előzetes megjegyzés.* A mértani közép-re vonatkozó adat kézenfekvővé teszi a szerkesztésnek számítással való előkészítését. Igyekszünk azonban geometriai megfontolások révén minél kevesebb számolással célhoz érni.

**I. megoldás:** Az  $AB = c$  átfogó ismeretében csak a derékszög  $C$  csúcsát kell megkapnunk. Erre egy mértani hely az  $AB$  átmérő fölötti Thalész-kör, a háromszög  $k$  körülírt köre. Az átfogó  $F$  felezőpontja egyben  $k$  középpontja, ezért a  $CF$  súlyvonal egyenlő  $k$ -nak  $r$  sugarával, az átfogó  $c/2$  felével. Így a feltétel szerint

$$ab = (c/2)^2 = c^2/4.$$

A bal oldal a háromszög kétszeres területét jelenti, az pedig másképpen  $cm_c$ -vel egyenlő. Így  $cm_c = c^2/4$ -ből  $m_c = c/4 = r/2$ .

Ennek alapján a háromszöget a következőképpen szerkeszthetjük meg: az  $AB = 2r$  átfogó felett megrajzoljuk a  $k$  Thalész-kört (elég az  $AB$  egyik oldalán levő felét, így megválasztva, hogy  $C$ -t melyik oldalon kívánjuk), ebből az  $AB$ -re merőleges  $FE$  sugárral kimetsszük az  $AB$  fölött  $r$  magasságban fekvő  $E$  pontot; végül  $FE$ -nek  $f$  felező merőlegesével  $k$ -ból kimetsszük  $C$ -t. A két metszéspont  $AB$ -nek  $FE = g$  felező merőlegesére tükrös, ezért az adódó két háromszög egybevágó.



1. ábra

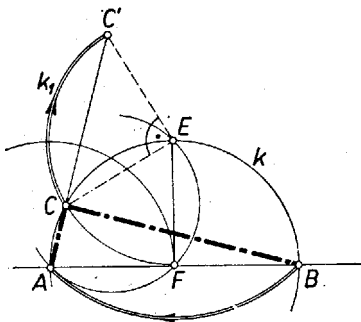
A nyert  $ABC$  háromszög megfelelő, mert derékszögű, továbbá  $c$ -re merőleges magassága  $r/2 = c/4$ , így kétszeres területe  $c \cdot c/4 = c^2/4$ , és ez egyenlő  $ab$ -vel. Innen a befogók mértani középáránya:  $\sqrt{ab} = c/2$ , és ezzel teljesül a követelmény, mert a kérdéses súlyvonal hossza ugyancsak  $c/2$ .

A  $C$  csúcsot mint  $k$  és  $f$  metszéspontját  $E$  birtokában  $f$  megrajzolása nélkül is megszerkeszthetjük. Mivel ugyanis  $k$  egy  $F$  körüli körív, így az  $E$  körül  $r$  sugárral rajzolt ív éppen  $C$ -t és  $g$ -re vonatkozó tükörképét metszi ki  $k$ -ból.

Szekeres Veronika (Makó, József A. Gimn. I. o. t.)

*Megjegyzés.* Tudva, hogy  $m_c = c/4 = r/2$ , meghatározhatjuk és megszerkeszthetjük a háromszög  $\beta$  szögét is. Jelöljük  $C$  tükörképét  $AB$ -re  $C'$ -vel. Ekkor a  $CFC'$  háromszög minden oldala  $r$  hosszúságú, tehát  $CFC' \sphericalangle = 60^\circ$ , így  $AFC \sphericalangle = 30^\circ$  és a  $BCF$  egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei, amelyek egyike  $\beta$ ,  $15^\circ$ -osak. – Ennek alapján az  $AB = c$  szakasz  $F$  felezőpontja körül, és  $A$  végpontja körül  $r = c/2$  sugárral  $k$ , ill.  $i$  kört rajzolunk; legyen ezek egyik metszéspontja  $D$ . A  $D$  körül  $r$  sugárral rajzolt körívnek  $i$ -vel való ( $F$ -től különböző) metszéspontját  $F$ -fel összekötő egyenes metszi ki  $k$ -ból a keresett  $C$  csúcsot.

**II. megoldás:** Forgassuk el a feltételnek megfelelő  $ABC$  háromszög  $BC$  befogóját az  $AB$  átmérő fölötti,  $C$ -t tartalmazó  $k$  félkörív  $E$  felezőpontja körül  $90^\circ$ -kal (2. ábra).



2. ábra

Ekkor  $BC$  párhuzamos helyzetbe kerül  $AC$ -vel.  $B$  az elforgatáskor  $A$ -ba kerül, ezért  $C$  az  $AC$  egyenes egy  $C'$  pontjába kerül. Mivel a feladat feltétele szerint

$$AC \cdot AC' = AC \cdot BC = (c/2)^2,$$

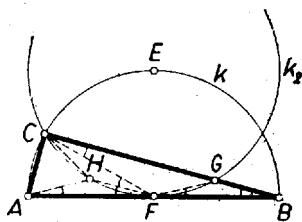
azért – annak a tételnek az alapján, hogy a körhöz egy külső pontból húzott szelőn keletkezett szakaszok mértani közepe egyenlő a pontból a körhöz húzható érintővel – az  $E$  pont körül  $C$ -n és  $C'$ -n át rajzolt  $k_1$  körhöz  $A$ -ból húzható

érintők hossza  $c/2$ . Tehát az érintési pontokat az  $A$  körül  $c/2$  sugárral rajzolt kör és az  $AE$  mint átmérő fölé rajzolt kör metszéspontjai adják. Ezek egyike az  $AB$  szakasz  $F$  felezőpontja, ezért  $k_1$  érinti  $F$ -ben  $AB$ -t, és így sugara  $EF = c/2$ . A  $C$  pontot tehát az  $E$  körül  $c/2$  sugárral rajzolt kör metszi ki  $k$ -ből.

Az így szerkesztett  $C$  pont megfelel a feltételnek, mert a  $k_1$  kör  $AC$ -vel való másik metszéspontját  $C'$ -vel jelölve  $AC \cdot AC' = (c/2)^2$ . Másrészt  $AC'$  az  $E$  körüli  $90^\circ$ -os elforgatással át vihető  $BC$ -be és így  $AC \cdot BC = AC \cdot AC' = (c/2)^2$ .

Lakner József (Székesfehérvár, József A. g. II. o. t.)

**III. megoldás:** A szakaszok mértani közepére előbb idézett tétel szerint az  $AB$ -t  $F$ -ben érintő és  $C$ -n átmenő  $k_2$  kör  $BC$ -t (mint szelőt) másodszor abban a ( $B$  és  $C$  közötti)  $G$  pontjában metszi, amelyre  $BG = BF^2/BC = c^2/4a = b = AC$  (3. ábra).



3. ábra

A  $BFG$  szög  $k_2$ -nek  $FG$  ívén fekszik, ezért egyenlő az  $FCB$  szöggel, és mivel a  $BFC$  háromszög egyenlő szárú (a  $BF$  és  $FC$  oldalak  $k$  sugarai), azért egyszersmind  $FBC \sphericalangle = \beta$ -val, tehát  $BFG$  egyenlő szárú háromszög,  $GF = GB = b$ . Legyen az  $F$ -en át  $BC$ -vel húzott párhuzamosnak  $k_2$ -vel való második metszéspontja  $H$ . Ez a párhuzamos felezi az  $AFC = 2\beta$  szöget (középponti szög a  $k$  kör  $AC$  ívén), mert a  $HFA$  szög egyállású  $CBA \sphericalangle = \beta$ -val, ennélfogva felezi  $k_2$ -nek az  $AFC$  szög szárai közötti  $FC$  ívét is. Így a  $HF$ ,  $HC$  húrok egyenlők, és mivel a  $GFHC$  idom húrtrapéz, azért  $HF = CH = FG = b$ . Ebből következik, hogy az  $AFH$  és  $FBG$  háromszögek egybevágók, mert két oldaluk és közbezárt szögük egyenlő, tehát  $AH = FG = b$ . Így pedig az  $ACH$  háromszög egyenlő oldalú, a  $HCA$  szög  $60^\circ$ . Ebből  $HCG \sphericalangle = FGC \sphericalangle = AFC \sphericalangle = 30^\circ$ , eszerint  $k_2$  középpontjából az  $FC = r = c/2$  húr  $60^\circ$ -os szögben látszik, így  $k_2$  sugara egyenlő  $r$ -rel, tehát  $k_2$  azonos az előző megoldásbeli  $k_1$ -gyel.

**IV. megoldás:** Kiszámíthatjuk a befogókat is. Feltehetjük, hogy  $a > b$ . Az  $ab = c^2/4$  egyenlőséget az ismeretlen  $a$ ,  $b$ -re egyenletnek tekintve és az  $a^2 + b^2 = c^2$  püthagorászi egyenlőséggel összekapcsolva könnyen megoldható típusú egyenletrendszert kapunk. Az első egyenlet kétszeresét a másodiktól kivonva, majd hozzáadva  $a - b$ -re, ill.  $a + b$ -re adódik egyenlet:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab &= (a - b)^2 = c^2 - c^2/2 = c^2/2, \\ a^2 + b^2 + 2ab &= (a + b)^2 = c^2 + c^2/2 = 3c^2/2, \end{aligned}$$

és innen, minthogy szakaszok pozitív különbségéről, ill. összegéről van szó:

$$a - b = c/\sqrt{2}, \quad a + b = c\sqrt{3}/\sqrt{2},$$

amik egyszerűen megszerkeszthető hosszúságok. Innen megkaphatjuk  $a$ -t vagy  $b$ -t; de  $a - b$ -ből vagy  $a + b$ -ből, továbbá a  $c$  oldalból és a vele szemben fekvő  $\gamma = 90^\circ$  szögből a háromszög ismert módon közvetlenül is megszerkeszthető.

Windisch Ferenc (Budapest, József A. Gimn. II. o. t.)