

I. megoldás: Az adott egyenlet ismeretlenét a keresett egyenlet ismeretlenével a következő azonosság kapcsolja össze:

$$(2) \quad \cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}, \text{ másképpen } 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,$$

(ahol a négyzetgyök előjele külön állapítandó meg abból, hogy x hányadik negyedbe esik). Ezért a keresett egyenletet úgy kaphatjuk meg, hogy (2)-t behelyettesítjük (1)-be és a kapott egyenletből eltávolítjuk a négyzetgyököt. Ez az eljárás ugyanaz, mint ha kifejezzük (1)-ből $\cos x$ első hatványát az együttthatókkal és $\cos^2 x$ -szel, ezt négyzetre emeljük és csak ezután helyettesítjük $\cos^2 x$ -et (2) második azonossága alapján; így lépésről lépésre

$$\begin{aligned} -b \cos x &= a \cos^2 x + c, \\ b^2 \cos^2 x &= a^2 \cos^4 x + 2ac \cos^2 x + c^2, \\ \frac{b^2 - 2ac}{2} (1 + \cos 2x) &= \frac{a^2}{4} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) + c^2, \end{aligned}$$

és a keresett egyenlet:

$$(3) \quad \frac{1}{4} a^2 \cos^2 2x + \frac{1}{2} (a^2 - b^2 + 2ac) \cos 2x + \frac{1}{4} (a^2 + 4ac + 4c^2 - 2b^2) = 0.$$

Az adott a, b, c számhármassal (1) és (3) így alakulnak:

$$(1^*) \quad 4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0,$$

$$(3^*) \quad 4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0,$$

ezek szerint $\cos x$ és $\cos 2x$ ugyanannak az egyenletnek a gyökei. E meglepő ténynek az a magyarázata, hogy a két egyenlet közös $(-1 \pm \sqrt{5})/4$ gyökeiből x értékei a $(-180^\circ, 180^\circ)$ intervallumban

$$-144^\circ, -72^\circ, 72^\circ, 144^\circ,$$

ezekből $2x$ értékei a $(-360^\circ, 360^\circ)$, majd a $(-180^\circ, 180^\circ)$ intervallumban

$$-288^\circ, -144^\circ, 144^\circ, 288^\circ, \text{ azaz } 72^\circ, -144^\circ, 144^\circ, -72^\circ,$$

így a két gyöknégyes csak a felsorolás sorrendjében különbözik.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos Gimn. III. o. t.)

II. megoldás: Legyenek (1) gyökei $(\cos x)_1 = z_1, (\cos x)_2 = z_2$, a keresett

$$(4) \quad A \cos^2 2x + B \cos 2x + C = 0$$

egyenlet gyökei pedig $(\cos 2x)_1 = w_1, (\cos 2x)_2 = w_2$. Így (2) alapján

$$(5) \quad z^2 = \frac{1+w}{2}, \text{ amiből } w_1 = 2z_1^2 - 1, \quad w_2 = 2z_2^2 - 1.$$

Ezekkel az együttthatókat a gyökökből előállító kifejezések szerint

$$\begin{aligned} -\frac{B}{A} &= w_1 + w_2 = 2(z_1^2 + z_2^2) - 2 = [2(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2] - 2, \\ \frac{C}{A} &= w_1 w_2 = 4z_1^2 \cdot z_2^2 - 2(z_1^2 + z_2^2) + 1 = 4z_1^2 \cdot z_2^2 - 2(z_1 + z_2)^2 + 4z_1 z_2 + 1, \end{aligned}$$

és mivel $z_1 + z_2 = -b/a$, és $z_1 z_2 = c/a$, azért

$$(6) \quad \begin{aligned} -\frac{B}{A} &= \frac{2b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} - 2 = \frac{2b^2 - 4ac - 2a^2}{a^2}, \\ \frac{C}{A} &= \frac{a^2 + 4ac + 4c^2 - 2b^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Ezekkel, A -t $a^2/4$ -nek választva (4)-ből ismét (3)-ra jutunk.

Timár Peregrin (Budapest, Eötvös J. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Többen megvizsgálták, hogy (1)-nek mely a, b, c értékrendszer mellett van (valós) megoldása, vagyis olyan, hogy a fenti jelölésekkel a $z_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ gyökök -1 és 1 közé esnek, e határokat is

megengedve, és így van olyan x szög, amelyre (1) teljesül. Ebben feltehetjük, hogy $a > 0$. – Mindenekelőtt teljesülnie kell a

$$(7) \quad b^2 - 4ac \geq 0$$

egyenlőtlenségnek, mert z_1 és z_2 csak így valósak. Ez azt jelenti, hogy (1) bal oldalát $\cos x = z$ függvényének tekintve az $y = az^2 + bz + c$ függvény grafikonjának legmélyebb pontja a Z -tengely (az abszcisszatengely) alatt, vagy magán a tengelyen fekszik. Ugyanis a szimmetria folytán a legmélyebb pont abszcisszája a zérushelyek (gyökök) számtani közepe $z_0 = (z_1 + z_2)/2 = -b/2a$, és így ordinátája: $a(-b/2a)^2 + b(-b/2a) + c = -(b^2 - 4ac)/4a$, ami (7) szerint negatív, vagy 0.

Mindkét gyök akkor és csak akkor esik -1 és 1 közé, ha egyrészt z_0 e határok közé esik:

$$(8) \quad -1 < -b/2a < 1, \quad \text{másképpen} \quad -2a < -b < 2a, \quad |b| < 2a,$$

továbbá a kisebb gyök nagyobb -1 -nél, és a nagyobb gyök kisebb 1 -nél:

$$-1 < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{és} \quad \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 1.$$

Ezekből rendezéssel és négyzetre emeléssel (figyelemmel arra, hogy ha mindkét oldal negatív, akkor négyzetre emelés után az egyenlőtlenség iránya ellentétesre fordul):

$$4a^2 - 4ab + b^2 > b^2 - 4ac, \quad b^2 - 4ac < 4a^2 + 4ab + b^2.$$

Végül újabb rendezéssel és osztással:

$$a - b + c > 0, \quad (9') \quad \text{ill.} \quad a + b + c > 0, \quad (9'')$$

(9') és (9'') azt írják elő, hogy az $f(z)$ függvény értéke a $z = -1$, ill. $z = 1$ helyen pozitív legyen, vagyis a parabola szemléletére támaszkodva a $(-1; a - b + c)$ és $(1; a + b + c)$ pontok mindegyike az X -tengely fölött legyen.

Ha már most (7), (8), (9') és (9'') teljesülnek, vagyis z_1 és z_2 valósak és -1 és 1 közé esnek, akkor (5) alapján ugyanezek állnak w_1 és w_2 -re. Nyilvánvaló ugyanis, hogy így w_1 és w_2 valósak, és ha $i = 1, 2$ esetén

$$-1 < z_i < 1, \quad \text{azaz} \quad 0 \leq |z_i| < 1,$$

akkor

$$0 \leq z_i^2 < 1, \quad 0 \leq 2z_i^2 < 2, \quad \text{és} \quad -1 \leq 2z_i^2 - 1 = w_i < 1.$$

Mindez úgy is bizonyítható, hogy (7), (8), (9') és (9'')-ben a, b, c helyére A, B, C -t írunk és az így kapott egyenlőtlenségek helyes voltának bizonyítására felhasználjuk (6), (7), (8), (9') és (9'')-t.

Ezek után könnyen kapunk feltételt arra, hogy (1)-nek pontosan egy gyöke essék -1 és 1 közé. A könnyen megállapítható $z = \pm 1$ gyököt kizárva – ekkor ugyanis (9'), ill. (9'') bal oldala 0 – ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy $f(-1)$ és $f(1)$, azaz (9') és (9'') bal oldala ellentett jelűek legyenek, vagyis szorzatuk negatív:

$$(a + c)^2 - b^2 < 0.$$

(Ebből ugyanis átrendezéssel $b^2 - 4ac > (a - c)^2 \geq 0$ következik, vagyis (7) fennáll, (8) megfelelőjére pedig nincs szükség.)

2. Az (1) egyenlet helyett (3)-ból (esetleg az átalakítás ismétlésével $\cos 4x, \cos 8x, \dots$ -re felírt egyenletből) x -et pontosabban határozhatjuk meg az olyan esetekben, ha a koszinusz-függvény $2x$ környezetében gyorsabban változik, mint x környezetében. Legyen pl. x egy a 10° körüli érték. A táblázat egymás utáni adatai között 20° körül nagyobbak az eltérések (a táblabeli különbségek), mint 10° körül, ezért az interpoláció pontosabban, kisebb hibával végezhető, sőt a kisebb hiba még feleződik is, amikor $2x$ -ből x -et számítjuk. Még jobbnak látszik e példában $4x, 8x$ -et kiszámítani $40^\circ, 80^\circ$ környezetében, ahol a koszinusz függvény a leggyorsabban változik. Viszont nem célszerű $16x$ -et számítani, mert 160° körül a koszinusz ismét lassan változik. Azonban x körülbelüli értékét (1)-ből meg kell állapítanunk, mert (3)-nak kétszer annyi gyöke van, mint (1)-nek. Pl. a fenti számpéldában

$$2x = \pm 72^\circ \quad \text{és} \quad \pm 432^\circ, \quad \pm 144^\circ \quad \text{és} \quad \pm 504^\circ,$$

tehát

$$x = \pm 36^\circ, \quad \pm 216^\circ, \quad \pm 72^\circ \quad \pm 252^\circ,$$

és ezek közül az eredeti egyenletet csak a 2-ik és 3-ik pár elégíti ki.

Az eljárás gyakorlati alkalmazásában természetesen arra is tekintettel kell lennünk, hogyha a, b, c kerekített adatok, akkor a (6)-ból adódó B, C együttthatók hibája nagyobb lehet. Másrészt előfordulhat, hogy $\cos x_1$ helyett $\cos 2x_1$ célszerűbb, mert abszolút értékben kisebb, viszont $|\cos 2x_2|$ nagyobb $|\cos x_2|$ -nél, és így $2x_2$ kevésbé pontosan állapítható meg, mint x_2 .