a) Legyen a keresett szám x, a nála d-vel kisebb szám y, és x^2 számjegyeinek száma k. Jelöljük a k darab 1-essel felírt számot C-vel, ekkor a feladat szerint

$$x^2 - y^2 = d \cdot C, \quad (1) \qquad x - y = d. \quad (2)$$

A bal oldalon $x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y) = d(x+y)$, tehát $d(x+y) = d \cdot C$, amit d-vel osztva ($d > 0$)

(3) $$x + y = C.$$

Így $x > y$ miatt $2x > C$, azaz $4x^2 > C^2$. Viszont x^2 és C jegyeinek száma k, ezért $C \geqq 10^{k-1}$, $C^2 \geqq 102^{k-2}$, és $10k > x^2$, tehát

$$4 \cdot 10^k > 4x^2 > C^2 \geqq 10^{2k-2}.$$

A két szélső tagból kapott egyenlőtlenség alapján $4 > 10^{k-2}$, amiből következik, hogy $k \leqq 2$. Nem lehet azonban $k = 1$, mert $C = x + y > 1$, tehát $k = 2$, $C = 11$, és x^2 kétjegyű szám, tehát x egyjegyű. Mivel így $x + y = 11$, azért $10 > x > y$, és (2)-re is tekintettel x, y és d szóba jövő értékei:

x=	6,	7,	8,	9,
y=	5,	4,	3,	2,
d=	1,	3,	5,	7.

Ezekkel

x^2=	36,	49,	64,	81,
y^2=	25,	16,	9,	4.

A harmadik és negyedik értékrendszer esetében x^2 második számjegye kisebb d-nél, ezek nem megoldásai a feladatnak. Az első két értékrendszer a feladat minden követelményét kielégíti, a keresett számok tehát 6 és 7.

b) Legyen a számrendszer alapszáma a. Az előző meggondolások egy részét átvehetjük, a többjegyű számokat az a-alapú számrendszerben értve. (1), (2) és (3) továbbra is érvényes, és a $4 > 10^{k-2} = (1 \cdot a + 0)^{k-2}$ egyenlőtlenség is érvényes marad, tehát

(4) $$a^{k-2} < 4,$$

és $k > 1$, hiszen $C = x + y > 1$ is változatlanul fennáll.

Nem lehet a sem 2, sem 3. Ugyanis a d számjegy $a-1$-nél kisebb, mert különben x^2-ből az ugyanannyi $a-1$ jegyből álló számot levonva nem kaphatunk pozitív maradékot. Ilyen pozitív d nincs, ha $a = 2$; az $a = 3$ esetben pedig d csak 1 lehetne. Ekkor a (3)-ból és (2)-ből adódó

$$x = \frac{C + d}{2}$$

összefüggés szerint C páratlan, így k értéke nem lehet 2, tehát (4)-et figyelembe véve $k = 3$, így $x = 7$, és 7^2 a 3-alapú számrendszerben már több mint 3-jegyű.

Minden $a \geqq 4$ alapszám esetében (4) alapján $k \leqq 2$, tehát $k = 2$, $C = a + 1$ és x^2 kétjegyű, ezért $x^2 < a^2$, x egyjegyű, azaz $x < a$.

(5) $$x + y = a + 1$$

és $x > y$ alapján y szóba jövő értékei 2, 3, 4, …, a_0, ahol a_0 az a legnagyobb egész szám, amelyre még $a_0 < a + 1 - a_0$, azaz $2a_0 < a + 1$.

Ha a páros, $a = 2u$, akkor $a_0 = u = \dfrac{a}{2}$, ha a páratlan, $a = 2u + 1$, akkor $a_0 = u = \dfrac{a-1}{2}$, tehát a_0 mindenképpen az a legnagyobb egész szám, amelyik még nem nagyobb $\dfrac{a}{2}$-nél, a szokásos jelöléssel $a_0 = \left[\dfrac{a}{2}\right]$.

Minden ilyen y esetén $x = a + 1 - y$ és $d = x - y = a + 1 - 2y$ kielégíti (1)-et és (2)-t, továbbá x^2 kétjegyű, hiszen $x > \dfrac{C}{2} > \dfrac{a}{2}$ miatt

$$x^2 > \frac{a^2}{a} \geqq a.$$

Az x, y, d számhármasok akkor megoldásai feladatunknak, ha x^2 mindkét számjegye külön-külön d-vel nagyobb y^2 megfelelő jegyénél. Ha ez a feltétel a második jegyekre teljesül, vagyis az

$$x^2 = y^2 dC = y^2 + (d + ad)$$

összeadást jegyenként végezve (először a d, majd az ad tagot adva hozzá) $y^2 + d$ első számjegye ugyanaz, mint y^2 első jegye, akkor teljesül az első jegyekre is. Így ugyanis nem viszünk át maradékot, az ad tag az y^2-nek a helyi értékű jegyét növeli d-vel, és x^2 első jegyét adja, mert itt nem lehet maradékátvitel, hiszen $x^2 < a^2$.

A második jegyek nagyságviszonyának vizsgálatát megkönnyíti a következő észrevétel: Legyen $z = y - 1$, ekkor x^2 és z^2 második számjegye megegyezik, hiszen így $x + z = a$, tehát $x^2 - z^2 = (x+z)\cdot(x-z) = a(x-z)$, különbségük osztható a-val. Elegendő tehát azoknak az y-értékeknek a számát meghatározni, melyek négyzetének második jegye kisebb a náluk 1-gyel kisebb z szám négyzetének második jegyénél. Ez $z<y$ miatt csak úgy lehetséges, hogy z^2 első jegye kisebb y^2 első jegyénél, mégpedig pontosan 1-gyel, hiszen $y^2-z^2=y+z=2y-1<x+y-1=a$.

Eszerint az $y=2,3,\ldots,a_0$ számok négyzetében első jegyként minden számjegy előfordul a_0^2 első jegyéig ($a>4$ esetén 0 is), és minden előforduló kezdő számjegyhez pontosan 1 megfelelő y-érték tartozik, mégpedig a legkisebb azok közül a számok közül, amelyeknek négyzete az illető számjeggyel kezdődik. Ha y^2 első számjegye 0, akkor y-hoz nem tartozik megoldása a feladatnak, hiszen ekkor a $z=y-1\geqq 1$ szám négyzetének második számjegye mindig kisebb y^2 második jegyénél. Így a feladatnak megfelelő y-értékek (és x, y, d értékrendszerek) száma egyenlő a_0^2 első számjegyével. Ezt megadja az $a_0^2:a$ hányados egész része, tehát a megoldások száma

$$\left[\frac{1}{a}a_0^2\right]=\left[\frac{1}{a}\left[\frac{a}{2}\right]^2\right].$$

Eredményünk megfelel az a) részben kapott eredményünknek, hiszen $a=10$ esetén $a_0=5$, és a_0^2 első jegye 2.