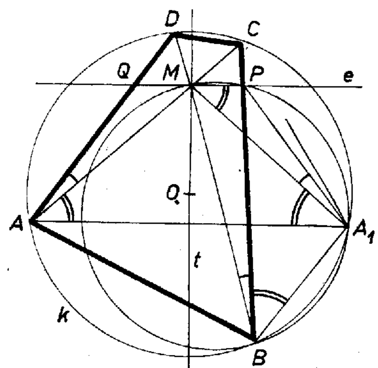
I. megoldás. Legyen az e egyenesnek a négyszög belsejébe eső szakasza PQ, és M felezze PQ-t. Ha e azonos a négyszög egyik átlójával, akkor a feladat állítása semmitmondó. Feltehetjük tehát, hogy e a két átló között halad, így a négyszöget szemközti oldalaiban metszi. Válasszuk úgy a betűzést, hogy P a négyszög BC, Q a DA oldalszakaszán legyen. Tükrözzük az A csúcsot a PQ szakasz t felező merőlegesére, kapjuk az A_1 pontot. Megmutatjuk, hogy A_1 rajta van az $ABCD$ négyszög köré írt k körön.

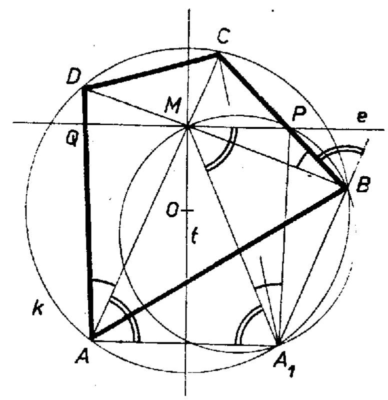
$AA_1 \parallel PQ$, hiszen mindkettő merőleges t-re. $PMA_1\sphericalangle = MA_1A\sphericalangle$, mert váltószögek, $MA_1A\sphericalangle = MAA_1\sphericalangle$ a tükrözés miatt, és ez utóbbi azonos a CAA_1 szöggel, tehát $PMA_1\sphericalangle = CAA_1\sphericalangle$. (Az 1.$a$-1.$b$ ábrákon t szétválasztja A-t és B-t.) Az A_1, B, P, M pontok egy körön vannak, hiszen

$$PBM\sphericalangle = CBD\sphericalangle = CAD\sphericalangle = MAQ\sphericalangle = MA_1P\sphericalangle,$$

egyrészt a kerületi szögek tétele, másrészt a tükrözés miatt, és mert az A_1, B pontok az MP egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak. Ha az A és B pontok az A_1C egyenes azonos oldalán vannak, akkor a B és M pontok is ugyanazon az oldalán vannak az A_1P egyenesnek, így az A_1P szakasz a B és M pontokból egyenlő szögben látszik.



1a. ábra

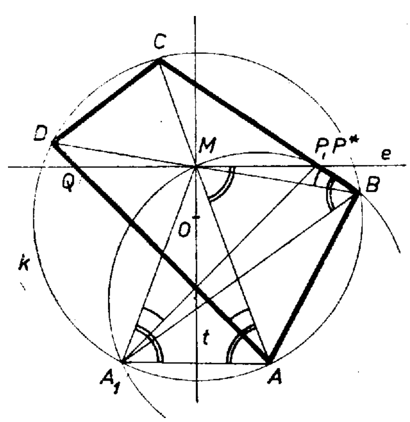


1b. ábra

Mivel A_1BP és A_1BC szögek azonosak, a PMA_1 és CAA_1 szögek pedig egyenlőek, az A_1C szakasz is ugyanakkora szögben látszik az A és B pontokból, A_1 tehát valóban rajta van az A, B, C pontok által meghatározott k körön.

Ugyanezt kapjuk, ha az A_1C egyenes elválasztja az A és B pontokat (1.b ábra). Ebben az esetben az A_1P egyenes is elválasztja az M és B pontokat, az A_1BP és PMA_1 szögek tehát 180°-ra egészítik ki egymást, így az A_1BC és CAA_1 szögek is 180°-ra egészítik ki egymást, és A_1 most emiatt lesz a k körön.

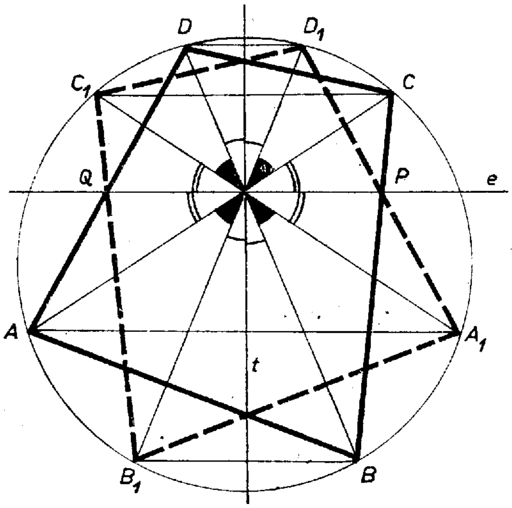
Hasonlóan adódik állításunk, ha A és B a t-nek ugyanazon oldalán van (2. ábra).



2. ábra

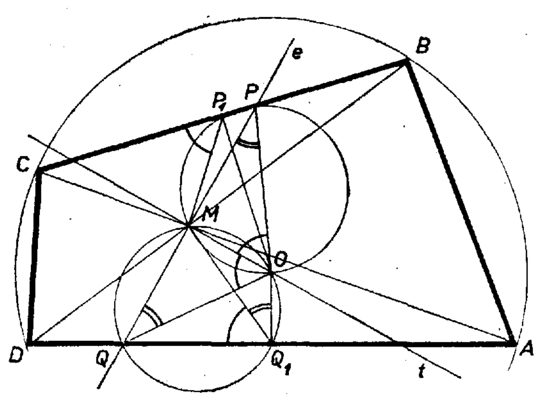
Mivel A_1 a k körön van, az AA_1 szakasz felezőmerőlegese, a t egyenes a k kör átmérője, így felezi a rá merőleges e egyenesre eső húrt, amint azt bizonyítanunk kellett.

Megjegyzések. 1. Lényegében ugyanígy halad a megoldás, ha a t egyenest eleve az M-en átmenő átmérőnek vesszük fel (2. ábra). Ebben az esetben A_1 nyilván a k körre kerül, ellenben bizonyítanunk kell, hogy PQ is merőleges t-re. Mivel ezt nehéz közvetlenül belátni, a versenyzők többsége a feladat állításának a fordítottját bizonyította, hogy ti. ha egy az M-en átmenő e egyenesnek M a körre eső húrját felezi, akkor felezi a négyszögbe eső szakaszát is. Ha M és k kör O középpontja azonos, akkor – mint az könnyen látható – minden egyenesnek megvan mindkét tulajdonsága. Ha M és O nem azonos, akkor M nyilván akkor felezi az e egyenesre eső húrt, ha $e \perp OM$. Ha tehát belátjuk egyrészt, hogy ebből következik, hogy M felezi az e egyenes négyszögbe eső szakaszát, másrészt, hogy olyan egyenes is csak egy van, amelyiknek a négyszögbe eső szakaszát M felezi, akkor e kettő együtt kiadja a feladat állításának a bizonyítását. Az első rész a fenti megoldáshoz hasonló módon bizonyítható: mivel $PMA_1\sphericalangle = A_1AC\sphericalangle$, az A_1, B, P, M pontok egy körön vannak, tehát $PA_1M\sphericalangle = PBM\sphericalangle$, viszont ez teljesül a Q pont tükrözéséből származó P^* pontra is: $P^*A_1M\sphericalangle = PBM\sphericalangle$, P^* tehát azonos P-vel. A második rész bizonyításával kapcsolatban a II. megoldás első mondataira utalunk.



3. ábra

2. Ha az egész négyszöget tükrözzük az OM egyenesre, akkor P és Q a megfelelő oldalak metszéspontja lesz, és azt kell megmutatnunk, hogy $PQ \perp OM$. Valóban, az M pontban keletkezett 12 szög közül a 3. ábrán azonosan jelzettekről könnyen kimutatható, hogy egyenlőek, amiből már következik az állításunk. Ebben az esetben azonban fel kell használnunk, hogy olyan egyenes, amelyen levő húrt M felezi, ill. olyan egyenes, amelynek a négyszögre eső szakaszát M felezi, csak egy van, mert csak ennek belátása után következik a feladatunk állítása abból, hogy az általunk adott konstrukció mellett a PQ egyenesnek mindkét tulajdonsága megvan.

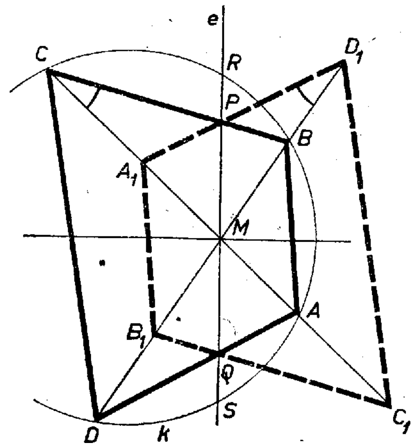


4. ábra

3. Azt viszont, hogy ha M felezi PQ-t, akkor a PQ szakasz t felező merőlegese átmegy a k kör középpontján, tükrözés nélkül is beláthatjuk (4. ábra). Legyen Q_1 az AD, P_1 a BC szakasz felezőpontja. Feltehetjük, hogy a Q_1 pontból a DM szakasz látszik hegyesszög alatt, ekkor az AMD, BMC háromszögek hasonlósága miatt a P_1 pontból ugyanakkora α szög alatt látszik a CM oldal. Attól függően, hogy a P, ill. a Q pont a P_1C, ill. Q_1D szakaszra esik-e vagy sem, az MP, ill. MQ szakasz vagy α, vagy $180^\circ - \alpha$ szög alatt látszik a P_1, ill. Q_1 pontokból.

Keressük meg a t egyenesnek az e egyenes A és B csúcsokat tartalmazó oldalára eső félegyenesén azt az O pontot, ahonnan az MP és MQ szakaszok α szög alatt látszanak. Akkor az O, P, P_1, M, ill. O, Q, Q_1, M pontok egy–egy körön lesznek, melyeknek OP és OQ átmérői, az OP_1P, OQ_1Q szögek tehát derékszögek, így O a k kör középpontjával azonos.

II. megoldás. Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget és a köré írható k kört a négyszög átlóinak M metszéspontjára. Ha M mindkét átlót felezi, a négyszög és a k kör önmagába megy át, ebben az esetben az M ponton átmenő egyeneseknek a négyszögbe és a körbe eső szakaszát is felezi M, állításunk tehát igaz. Ha M csak egy átlót felez, válasszuk úgy a betűzést, hogy ez az AC átló legyen, és teljesüljön, hogy $BM < MD$. Akkor a tükrözés során az A és C csúcsok helyet cserélnek, a B csúcs, és a belőle kiinduló AB, BC oldalak a négyszög belsejébe, a D csúcs és a belőle kiinduló CD, DA oldalak a négyszögön kívülre kerülnek, így csak az AC átlónak felezi M a négyszögbe eső darabját, AC viszont egyben a k-nak is húrja, állításunk tehát ismét nyilvánvaló.



5. ábra

A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy M egyik átlót sem felezi. Válasszuk úgy a betűzést, hogy az AC átlón A, a BD átlón B legyen az M-hez közelebbi csúcs (5. ábra). A tükrözés során kapott A_1 és B_1 csúcs az eredeti négyszög belsejében lesz, a C_1, D_1 csúcs pedig azon kívülre kerül, így csak a BC és A_1D_1, ill. DA és B_1C_1 szakaszok metszhetik egymást a tükrözött és az eredeti négyszög kerületén. Legyenek a metszéspontok P és Q, ekkor csak a PQ egyenesnek felezheti M a négyszögbe eső szakaszát. A kapott BD_1P és A_1CP háromszögek hasonlóak, hiszen P-nél levő szögük egyenlő és

$$A_1CP\sphericalangle = ACB\sphericalangle = ADB\sphericalangle = A_1D_1B_1\sphericalangle = PD_1B\sphericalangle,$$

emiatt

$$\frac{A_1P}{PC} = \frac{BP}{PD_1}.$$

A tükrözés miatt viszont $A_1P = AQ$ és $PD_1 = QD$, tehát

$$AQ \cdot QD = BP \cdot PC,$$

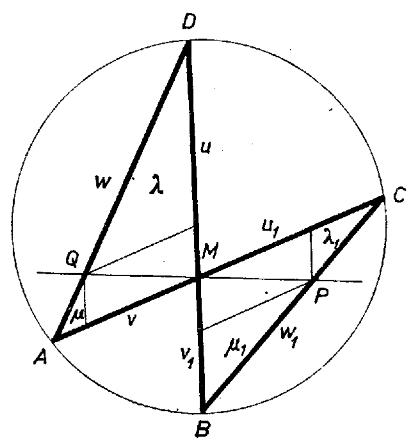
azaz a P és Q pontoknak a k körre vonatkoztatott hatványuk egyenlő. (Ismeretes, hogy egy k körhöz adott P pontból húzott szelő darabjainak szorzata független a szelő választásától – ezt a szorzatot nevezzük a P pont k körre vonatkozó hatványának.) Ebből már következik a bizonyítandó állítás, hiszen ha a PQ egyenes a k kört az R, S pontokban metszi, és $PS > QS$, akkor

$$RP \cdot PS = RQ \cdot QS,$$

és mindkét oldalból $RP \cdot QS$-t levonva kapjuk, hogy

$$RP(PS - QS) = (RQ - RP)QS,$$

ahol $PS - QS = PQ = RQ - RP$, tehát valóban $RP = QS$, azaz $RM = MS$.



6. ábra

Megjegyzések. 1. Azt, hogy a P, Q pontok k-ra vonatkozó hatványa egyenlő, tükrözés nélkül is beláthatjuk.

Húzzunk P-n és Q-n át párhuzamosakat az AC, BD átlókkal (6. ábra), így az egymáshoz hasonló ADM, BCM háromszögek mindegyikét egy paralelogrammára és két háromszögre vágtuk fel. A keletkezett négy kis háromszög hasonló az eredeti háromszögekhez, a paralelogrammák is hasonlók, és mivel PM és MQ átlóik egyenlők, egybevágóak is. Legyenek az ADM és BCM háromszögek oldalai rendre u, v, w, ill. u_1, v_1, w_1, és a DQ, QA, ill. CP, PB alapú kis háromszögek oldalai a megfelelő nagy háromszögek oldalainak rendre λ, μ, ill. λ_1, μ_1-szeresei. Az AC átlóval párhuzamos oldalt a DQ és PB alapú, a BD átlóval párhuzamos oldalt pedig a QA, PC alapú háromszögben felírva kapjuk, hogy

$$\lambda v = \mu_1 u_1; \qquad \mu u = \lambda_1 v_1,$$

ezeket összeszorozva

$$\lambda\mu uv = \lambda_1\mu_1 u_1 v_1.$$

Az ADM, BCM háromszögek hasonlósága miatt

$$u : w = u_1 : w_1 \qquad \text{és} \qquad v : w = v_1 : w_1,$$

ezt a két aránypárt összeszorozva kapjuk, hogy

$$uv : w^2 = u_1 v_1 : w_1^2.$$

Ebből következik, hogy

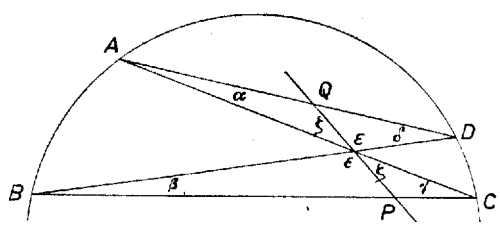
$$\lambda w \cdot \mu w = \lambda_1 w_1 \cdot \mu_1 w_1,$$

ami épp a bizonyítandó egyenlőség:

$$DQ \cdot QA = CP \cdot PB.$$

Beláthatjuk ezt a színusz–tétel felhasználásával is (7. ábra):

$$\frac{BP}{QD} = \frac{BP}{MP} : \frac{QD}{QM} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta} : \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta} = \frac{\sin\zeta}{\sin\alpha} : \frac{\sin\zeta}{\sin\gamma} = \frac{AQ}{QM} : \frac{PC}{MP} = \frac{AQ}{PC}.$$



7. ábra

2. Ha felhasználjuk, hogy két egymást metsző körre azon pontok mértani helye, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő, a két kör metszéspontjain átmenő egyenes, akkor megoldásunk rövidebben is befejezhető. A P pontnak a k körre vonatkozó hatványa $BP \cdot PC$, a k' körre vonatkozó hatványa $A_1P \cdot PD_1$, mivel ez a két szorzat az A_1BD_1C húrnégyszögben egyenlő, P – és hasonló módon Q is – rajta van a k és k' körök hatvány–vonalán, így a két kör centrálisa merőleges PQ-ra, a tükrözés miatt átmegy M-en, és felezi a k kör PQ egyenesre eső húrját.